MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

62. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 16. MÄRZ 1955)

QA1
M88
v. 62-64

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1955

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

62. Band — **Inhalt** — 1. Heft

Seite

Bol, G., Zur projektiven Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung 1

Grotemeyer, K. P., Die eindeutige Bestimmung einer Klasse von offenen, vollständigen Flächen durch die Metrik 17

Barthel, W., Variationsprobleme der Oberflächenfunktion in der Finslerschen Geometrie 23

Leichtweiss, K., Zwei Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie 37

Barner, M., Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen 50

Künzi, H., Zwei Beispiele zur Wertverteilungslehre 94

Bagemihl, F., and W. Seidel, A problem concerning cluster sets of analytic functions 99

Bol, G.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 1—16 (1955)

Zur projektiven Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung.

Herrn Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

Gerrit Bol.

Bekanntlich nennt man

$$\mathfrak{p}(u,v) + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{p}}(u,v) \tag{1}$$

eine infinitesimale Verbiegung der Fläche

$$\mathfrak{p}(u,v) = \{p_1(u,v),\, p_2(u,v),\, p_3(u,v)\} \tag{2}$$

des Euklidischen Raumes, wenn das Bogenelement von (1) in erster Ordnung von ε unabhängig ist. Notwendig und hinreichend dazu ist die Bedingung

$$d\mathfrak{p} \cdot d\bar{\mathfrak{p}} = 0. \tag{3}$$

Entsprechende Tangenten beider Flächen $\mathfrak{p}(u,v)$ und $\bar{\mathfrak{p}}(u,v)$ stehen dann also aufeinander senkrecht. Man kann ein solches Flächenpaar aufeinander *orthogonal bezogen* nennen. $\bar{\mathfrak{p}}(u,v)$ nennt man gelegentlich auch den *Verschiebungsvektor* der Verbiegung an der Stelle (u,v).

Schon G. Darboux hat erkannt, daß die Eigenschaften solcher infinitesimalen Flächenverbiegungen zum Teil projektiver Natur sind[1]). Später hat dies vor allem R. Sauer hervorgehoben[4]).

Bekanntlich[2]) hängen die Verbiegungen einer Fläche sehr eng zusammen mit den W-Kongruenzen, die sie berühren. G. Fubini hat gezeigt, daß sich der von ihm aufgebaute Formelapparat für die projektive Behandlung solcher Kongruenzen auch zur Behandlung von Fragen der infinitesimalen Flächenverbiegung hervorragend eignet; man gelangt so zu einem rein projektiven Aufbau der Verbiegungstheorie, der dem klassischen gegenüber manche Vorteile aufweist[3]).

Diese Zusammenhänge werden hier weiter verfolgt, wobei insbesondere eine direkte eineindeutige Beziehung zwischen den infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche und den Lösungen der Fubinischen Grundgleichungen (2.8) hergestellt wird. Zwischen dem Schraubriß einer Verbiegung und der zu ihr gehörigen W-Kongruenz wird eine einfache projektive Beziehung hergeleitet, die bisher anscheinend nicht beachtet worden ist.

---

[1]) Darboux, G.: Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 73—86.

[2]) Vgl. § 1.

[3]) Fubini, G., u. E. Čech: Geometria Proiettiva Differenziale, Bd. I, Kap. V. Bologna 1926/27. Das Buch wird weiterhin GPD zitiert.

[4]) Vgl. Darboux, G.: Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 48—72. — Salkowski, G.: Affine Differentialgeometrie. Berlin 1934. — Sauer, R.: Arch. Math. I, 89—93 (1948).

Kaum berührt wird in dieser Note die Theorie des mit einer infinitesimalen Verbiegung verknüpften DARBOUXschen Flächenkranzes. Auf die sehr wesentlichen Vereinfachungen, die sich für den Aufbau dieses Flächensystems[4]) aus unseren Betrachtungen ergeben, soll an anderer Stelle zurückgekommen werden.

§ 1. Schraubriß und W-Kongruenz.

Zu jeder Verbiegung einer Fläche gehört an jeder Stelle (u, v) eine eindeutig bestimmte Bewegung des Raumes, welche das entsprechende Flächenelement der Urfläche mit demjenigen der Verbiegung in erster Ordnung zur Deckung bringt. Eine solche Bewegung läßt sich eindeutig aufspalten in eine Rotation um den Nullpunkt und eine nachfolgende Parallelverschiebung; die letztere kann man durch den zugehörigen Translationsvektor, die erste in bekannter Weise durch einen Drehvektor längs der Achse der Drehung beschreiben.

Insbesondere gilt das auch für jede infinitesimale Verbiegung (1) der Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$. Wir stellen den Translationsvektor der zur Stelle (u, v) gehörigen Bewegung dar durch $\varepsilon\,\mathfrak{s}(u, v)$, den Rotationsvektor durch $\varepsilon\,\mathfrak{r}(u, v)$. Dann ist also

$$\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}\times\mathfrak{p}, \tag{1.1}$$

$$d\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{r}\times d\mathfrak{p} \tag{1.2}$$

und hierdurch sind die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ an jeder Stelle (u, v) eindeutig festgelegt.

Wir nennen $\mathfrak{s}(u, v)$ den *Translationsriß*, $\mathfrak{r}(u, v)$ den *Rotationsriß* der Verbiegung, und fassen beide zusammen zu dem Sechservektor

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{s}], \tag{1.3}$$

den wir den *Schraubriß* der Verbiegung nennen[5]).

Wie üblich machen wir über die Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$ und ihre Darstellung die Regularitätsvoraussetzung, daß die Vektoren $\mathfrak{p}_u$ und $\mathfrak{p}_v$ linear unabhängig sein sollen. $\mathfrak{p}(u, v)$ soll dreimal, der Schraubriß $\mathfrak{S}(u, v)$ einmal stetig differenzierbar sein.

Aus (1.1) folgt durch Differentiation unter Berücksichtigung von (1.2)

$$0 = d\mathfrak{s} + d\mathfrak{r}\times\mathfrak{p} \tag{1.4}$$

und daraus durch Multiplikation mit $d\mathfrak{r}$

$$d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{s} = 0. \tag{1.5}$$

Translationsriß und Rotationsriß sind also wieder orthogonal bezogene Flächen.

Weiter erhält man aus (1.2) oder

$$\bar{\mathfrak{p}}_u = \mathfrak{r}\times\mathfrak{p}_u, \quad \bar{\mathfrak{p}}_v = \mathfrak{r}\times\mathfrak{p}_v \tag{1.6}$$

die Integrierbarkeitsbedingung

$$\mathfrak{r}_v\times\mathfrak{p}_u = \mathfrak{r}_u\times\mathfrak{p}_v. \tag{1.7}$$

[5]) Die Bezeichnungen stammen von W. BLASCHKE und R. SAUER.

Ist dieser Vektor vom Nullvektor verschieden, so steht er senkrecht auf $\mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v, \mathfrak{r}_u, \mathfrak{r}_v$, was bedeutet, daß die Vektoren $\mathfrak{r}_u$ und $\mathfrak{r}_v$ zur Tangentenebene der Fläche $\mathfrak{p}$ parallel sind. Dies gilt natürlich auch wenn beide Vektorprodukte in (1.7) verschwinden.

Weiter gilt bekanntlich der Satz:

Die Ableitung

$$d\bar{\mathfrak{s}} = [d\mathfrak{r}, d\bar{\mathfrak{s}}] \tag{1.8}$$

des Schraubrisses in einer beliebigen Richtung (du, dv) *stellt, falls sie nicht verschwindet, eine Tangente der Fläche* $\mathfrak{p}$ *an der Stelle* (u, v) *dar.*

Denn nach (1.4) besteht der Sechservektor

$$d\bar{\mathfrak{s}} = [d\mathfrak{r}, \mathfrak{p} \times d\mathfrak{r}] \tag{1.9}$$

aus den Plückerschen Linienkoordinaten der Geraden durch $\mathfrak{p}$ in der Richtung $d\mathfrak{r}$; diese berührt aber nach dem Vorangehenden die Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$.

Ist umgekehrt einer Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$ *durch gleiche Parameterwerte eindeutig ein zweiparametriges System von Sechservektoren* (1.3) *zugeordnet, dessen Ableitung in jeder Richtung* (du, dv) *entweder verschwindet oder eine Gerade durch den zugehörigen Flächenpunkt darstellt, so bilden diese Sechservektoren den Schraubriß einer infinitesimalen Verbiegung von* $\mathfrak{p}(u, v)$.

Die Voraussetzung bedeutet nämlich, daß (1.4) gilt. Erklärt man nun $\bar{\mathfrak{p}}(u, v)$ durch (1.1), so folgt durch Differentiation hiervon unter Berücksichtigung von (1.4), daß auch (1.2) gilt, also daß die durch $\bar{\mathfrak{s}}$ dargestellte Bewegung an jeder Stelle das Flächenelement erster Ordnung von $\mathfrak{p}(u, v)$ in das entsprechende von $\mathfrak{p} + \varepsilon \bar{\mathfrak{p}}$ überführt.

Bekanntlich begründen die hervorgehobenen Sätze den projektiven Charakter der infinitesimalen Verbiegungen; die in ihnen zum Ausdruck gebrachten Eigenschaften sind ja bei Projektivitäten invariant.

Zur weiteren Klärung der Verhältnisse erinnern wir an die Beziehungen zur Theorie der W-Kongruenzen. Nach G. Darboux[6]) sind diese Strahlensysteme dadurch gekennzeichnet, daß die Umgebung zweiter Ordnung jedes Strahles einem linearen Komplex angehört. Wir nennen diesen Komplex den zum Strahl gehörigen *Schmiegkomplex* der Kongruenz.

Wir wollen nun zeigen:

An jeder Stelle (u, v), *an der die Verschiebung* $\bar{\mathfrak{p}}$ *nicht senkrecht auf der Fläche steht, also die* Pfaffsche *Form*

$$\bar{\mathfrak{p}}\, d\mathfrak{p}$$

nicht identisch in du, dv *verschwindet, gibt es genau eine Tangente der Fläche, die dem von* $\bar{\mathfrak{s}}$ *dargestellten linearen Komplex angehört. Diese Tangenten bilden ein W-Strahlensystem. Der Schraubrißvektor* $\bar{\mathfrak{s}}$ *stellt an jeder Stelle* (u, v) *den Schmiegkomplex dieser Kongruenz dar*[7]).

[6]) Vgl. etwa G. Bol, Projektive Differentialgeometrie, Bd. I, § 34. Göttingen 1950, 1954. Das Buch wird weiterhin mit PD zitiert.

[7]) Auf den letztgenannten Sachverhalt, der bisher nicht beachtet zu sein scheint, stützen wir uns in erster Linie bei der folgenden Darstellung der Verbiegungstheorie.

Zunächst gehört nämlich der Strahl durch $\mathfrak{p}$ in der Richtung $\mathfrak{v}$ mit den Geradenkoordinaten

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{v}, \mathfrak{p}\times\mathfrak{v}] \tag{1.10}$$

dann und nur dann dem von (1.3) dargestellten linearen Komplex an, wenn

$$\mathfrak{s}\circ\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{p}\times\mathfrak{v}) + \mathfrak{s}\,\mathfrak{v} = 0\ ^{8}). \tag{1.11}$$

Dafür kann man aber auch schreiben

$$\mathfrak{v}\,[\mathfrak{r}\times\mathfrak{p} + \mathfrak{s}] = 0,$$

also nach (1.1)

$$\mathfrak{v}\,\bar{\mathfrak{p}} = 0. \tag{1.12}$$

Auf Grund unserer Voraussetzung gibt es aber nur eine Richtung $d\mathfrak{p}$ auf der Fläche in unserem Flächenpunkt, für die diese Bedingung erfüllt ist. Wir denken uns nun für den Augenblick die Parameter auf der Fläche so gewählt, daß die u-Kurven an jeder Stelle von der fraglichen Flächentangente berührt wird. Dann ist also

$$\bar{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{p}_u = 0 \tag{1.13}$$

und

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}\times\mathfrak{p}_u]. \tag{1.14}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß

$$\mathfrak{s}\circ\mathfrak{g} = \mathfrak{s}\circ\mathfrak{g}_u = \mathfrak{s}\circ\mathfrak{g}_v = \mathfrak{s}\circ\mathfrak{g}_{uu} = \mathfrak{s}\circ\mathfrak{g}_{uv} = \mathfrak{s}\circ\mathfrak{g}_{vv} = 0. \tag{1.15}$$

Beachtet man, daß für die Differentiation der durch das Zeichen $\circ$ dargestellten Polarprodukte die übliche Regel gilt, so stellt man sofort fest, daß (1.15) gleichwertig ist mit

$$\mathfrak{s}\circ\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_u\circ\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_v\circ\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_u\circ\mathfrak{g}_u = \mathfrak{s}_v\circ\mathfrak{g}_u = \mathfrak{s}_v\circ\mathfrak{g}_v = 0. \tag{1.16}$$

Daß diese Bedingungen erfüllt sind, läßt sich aber sehr leicht nachprüfen. Einerseits gilt nämlich für die Sechservektoren

$$\mathfrak{s}_u = [\mathfrak{r}_u, \mathfrak{s}_u], \quad \mathfrak{s}_v = [\mathfrak{r}_v, \mathfrak{s}_v] \tag{1.17}$$

nach (1.4)

$$\mathfrak{s}_u + \mathfrak{r}_u\times\mathfrak{p} = 0, \quad \mathfrak{s}_v + \mathfrak{r}_v\times\mathfrak{p} = 0, \tag{1.18}$$

andererseits folgt aus (1.14)

$$\mathfrak{g}_u = [\mathfrak{p}_{uu}, \mathfrak{p}\times\mathfrak{p}_{uu}], \quad \mathfrak{g}_v = [\mathfrak{p}_{uv}, \mathfrak{p}\times\mathfrak{p}_{uv} + \mathfrak{p}_v\times\mathfrak{p}_u]. \tag{1.19}$$

---

[8]) Das Polarprodukt $\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}$ zweier Sechservektoren $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ und $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ wird erklärt durch

$$\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_1.$$

Es verschwindet dann und nur dann, wenn die von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im KLEINschen Geradenraum dargestellten Punkte polar liegen in bezug auf die absolute Quadrik Q dieses Raumes. Für die Bezeichnung vergleiche man PD I, §§ 16 bis 20.

Da $\mathfrak{g}$ durch die Beziehung $\mathfrak{s} \circ \mathfrak{g} = 0$ definiert wurde, sind nur noch die letzten 5 Relationen (1.16) nachzuprüfen. Man findet in der Tat

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{g} &= (\mathfrak{s}_u + \mathfrak{r}_u \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_u &= 0 \\
\mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g} &= (\mathfrak{s}_v + \mathfrak{r}_v \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_u &= 0 \\
\mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{g}_u &= (\mathfrak{s}_u + \mathfrak{r}_u \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_{uu} &= 0 \\
\mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g}_u &= (\mathfrak{s}_v + \mathfrak{r}_v \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_{uu} &= 0 \\
\mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g}_v &= [\mathfrak{s}_v + \mathfrak{r}_v \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_{uv} + (\mathfrak{r}_v, \mathfrak{p}_v, \mathfrak{p}_u) &= 0,
\end{aligned}$$

denn in der letzten Gleichung ist die Determinante

$$(\mathfrak{r}_v, \mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v) = 0, \tag{1.20}$$

weil $\mathfrak{r}_v$ zur Tangentenebene der Fläche $\mathfrak{p}$ parallel ist.

Damit ist der angekündigte Satz bewiesen; die Umgebung zweiter Ordnung des Strahles $\mathfrak{g}$ liegt im linearen Komplex $\mathfrak{s}$.

Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß unter gewissen Regularitätsbedingungen die Sechservektoren, welche die Schmiegkomplexe einer berührenden W-Kongruenz einer Fläche darstellen, sich auch umgekehrt stets so normen lassen, daß ihre Ableitungen entweder verschwinden oder Tangenten der Fläche im Berührungspunkt mit dem Kongruenzstrahl darstellen.

Denkt man sich Fläche und Kongruenz zunächst in einem projektiven Raum, so liefern dann die normierten Sechservektoren der Schmiegkomplexe für jede in diesem Raum eingeführte Euklidische Metrik den Schraubriß einer infinitesimalen Verbiegung der Fläche.

Die Frage nach den infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche ist so auf eine rein projektive über die W-Kongruenzen, welche die Fläche berühren, zurückgeführt.

§ 2. Die Grundgleichungen.

Im folgenden gehen wir aus von einem nirgendwo parabolisch gekrümmten Flächenstück, das auf Asymptotenlinienparameter u, v bezogen ist. Den projektiven Koordinatenvektor

$$\mathfrak{x}(u, v) = \{x_0(u, v),\ x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v)\}$$

denken wir uns so normiert, daß die sicher von Null verschiedene Determinante

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}) = \varkappa \tag{2.1}$$

eine Konstante ist. $\mathfrak{x}(u, v)$ sei in dieser Darstellung zweimal stetig differenzierbar. Dann gelten Ableitungsgleichungen von der Form[9])

$$\mathfrak{x}_{uu} = \beta \mathfrak{x}_v + \pi \mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x}_{vv} = \gamma \mathfrak{x}_u + \chi \mathfrak{x}. \tag{2.2}$$

[9]) Für die Grundformeln der projektiven Flächentheorie vergleiche man PD I §§ 28 bis 30, sowie PD II, §§ 74 bis 79, § 95.

Ist die Fläche elliptisch gekrümmt, so sei sie zunächst auf Parameter bezogen, für die die metrische zweite Fundamentalform die isotherme Gestalt hat:

$$A(\xi, \eta)\,(d\xi^2 + d\eta^2). \tag{2.3}$$

Setzt man dann

$$u = \xi + i\eta, \quad v = \xi - i\eta, \tag{2.4}$$

so haben die Ableitungsgleichungen wiederum die Gestalt (2.1) und für reelle Flächenpunkte sind u, v konjugiert komplex.

Die Schmiegtangenten unserer Fläche werden jetzt dargestellt durch die Sechservektoren

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u), \quad \mathfrak{v} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v). \tag{2.5}$$

Nach (2.2) gelten für sie die Beziehungen

$$\mathfrak{u}_u = \beta\,\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{v}_v = \gamma\,\mathfrak{u}. \tag{2.6}$$

Hat der Sechservektor $\mathfrak{s}(u, v)$ die Eigenschaft, daß seine Ableitungen Tangenten der Fläche an der Stelle (u, v) darstellen, so wollen wir $\mathfrak{s}(u, v)$ im Sinne von § 1 einen *Schraubriß* für die Fläche nennen.

Ist $\mathfrak{s}(u, v)$ ein Schraubriß, so genügen die durch

$$b = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{u}, \quad a = -\mathfrak{s} \circ \mathfrak{v} \tag{2.7}$$

erklärten Größen a, b den Differentialgleichungen

$$a_v = -\gamma\, b, \quad b_u = -\beta\, a. \tag{2.8}$$

Da nämlich $\mathfrak{s}_u$ und $\mathfrak{s}_v$ Tangenten darstellen, ist

$$\mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{u} = \mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{v} = \mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{u} = \mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{v} = 0. \tag{2.9}$$

Daher folgt aus (2.6) sofort die Behauptung.

Wir nennen (2.8) die projektiven *Grundgleichungen* für die infinitesimale Flächenverbiegung und wollen den *Hauptsatz* beweisen:

Unter geeigneten Differenzierbarkeitsannahmen lassen sich die infinitesimalen Verbiegungen eines nirgendwo parabolisch gekrümmten Flächenstücks eindeutig den Lösungen der Grundgleichungen für dieses Flächenstück zuordnen.

Wir zeigen zunächst, daß nach (2.7) zu verschiedenen Schraubrissen auch verschiedene Lösungen der Grundgleichungen gehören. Wegen der Linearität genügt es zu zeigen, daß aus

$$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{u} = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{v} = 0 \tag{2.10}$$

folgt, daß der Schraubrißvektor $\mathfrak{s}$ der Nullvektor ist.

Nun folgt aus (2.9) und (2.10), daß $\mathfrak{s}$ auch zu den Ableitungen

$$\mathfrak{u}_v = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) + (\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_u), \quad \mathfrak{v}_u = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) + (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)$$

von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, also zu $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv})$ und $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)$ polar ist. Zu den vier Vektoren $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u)$, $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v)$, $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)$, $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv})$ sind aber nur die Linearkombinationen von $\mathfrak{u}$ und

polar, wir hätten also

$$\mathfrak{s} = c\,\mathfrak{u} + e\,\mathfrak{v}$$

und

$$\mathfrak{s}_v \equiv c(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) + c(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) \pmod{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}}.$$

Da dies eine Tangente der Fläche darstellen soll, ist aber $c = 0$, und ebenso sieht man, daß $e = 0$ ist.

Um umgekehrt zu jeder Lösung von (2.8) einen Schraubriß zu finden, der zu ihr in der Beziehung (2.7) steht, berufen wir uns auf die FUBINIsche Theorie der W-Kongruenzen, welche eine Fläche berühren[10]). Diese lehrt, daß zu jeder Lösung von (2.8), bei der a und b beide von Null verschieden sind, eine W-Kongruenz gehört, deren Strahlen durch

$$\mathfrak{g} = a\,\mathfrak{u} + b\,\mathfrak{v} \tag{2.11}$$

dargestellt werden.

Mittels des in PD II, § 114 aufgestellten Formelapparates läßt sich leicht der Schmiegkomplex dieser Kongruenz bestimmen, und zwar liefert ihn die Theorie gleich in der richtigen Normierung als Schraubriß. Bei diesen Formeln wurde ein halbinvariantes Differentiationsverfahren verwendet. Nach Rücktransformation auf gewöhnliche Ableitungen findet man, wenn

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\,\mathfrak{a} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) - (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) & 2\,\mathfrak{b} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) + (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) \\ \mathfrak{p} = (\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}) & \mathfrak{q} = (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uv}) \\ L = \pi + \tfrac{1}{2}\beta_v & M = \chi + \tfrac{1}{2}\gamma_u \end{array}\right. \tag{2.12}$$

gesetzt wird, für den Schmiegkomplex $\mathfrak{c}$ der Kongruenz die Darstellung

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{c} = a\,\mathfrak{q} - a_u\,\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2}(a_{uu} - 2L\,a + \beta\gamma\,b)\,\mathfrak{v} + \\ \qquad + b\,\mathfrak{p} - b_v\,\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}(b_{vv} - 2M\,b + \beta\gamma\,a)\,\mathfrak{u} \end{array}\right. \tag{2.13}$$

mit den Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{c}_u = h\,\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{c}_v = k\,\mathfrak{u}. \tag{2.14}$$

Dabei ist

$$\left\{\begin{array}{l} 2h = a_{uuu} - 4L\,a_u - 2L_u\,a + \beta\,b_{vv} - \beta_v\,b_v + (\beta_{vv} - 4\beta M)\,b \\ 2k = b_{vvv} - 4M\,b_v - 2M_v\,b + \gamma\,a_{uu} - \gamma_u\,a_u + (\gamma_{uu} - 4\gamma L)\,a \end{array}\right. \tag{2.15}$$

und für die Größe

$$2G = \varkappa^{-1}\,\mathfrak{c}\circ\mathfrak{c} = -a\,a_{uu} + \tfrac{1}{2}a_u^2 + 2L\,a^2 + b\,b_{vv} - \tfrac{1}{2}b_v^2 - 2M\,b^2 \tag{2.16}$$

gilt

$$G_u = -a\,h, \qquad G_v = b\,k. \tag{2.17}$$

Diese Beziehungen lassen sich leicht, aber etwas umständlich, auch ohne den Umweg über die halbinvariante Differentiation bestätigen, wenn man

[10]) Vgl. PD II, § 114.

die aus (2.2) hervorgehenden Integrierbarkeitsbedingungen

$$(2.18)\qquad \begin{cases} 2L_v = \beta_u\gamma + 2\beta\gamma_u \\ 2M_u = \gamma_v\beta + 2\gamma\beta_v \\ 2\beta M_v + 4\beta_v M - \beta_{vvv} = 2\gamma L_u + 4\gamma_u L - \gamma_{uuu} \end{cases}$$

berücksichtigt[11]). Man stellt dann fest, daß für den Sechservektor $\mathfrak{c}$ aus (2.13) die Gln. (2.14) auch dann gelten, wenn a und b Null werden. Da aus (2.12)

$$(2.19)\qquad \mathfrak{c}\circ\mathfrak{u} = b\varkappa, \qquad \mathfrak{c}\circ\mathfrak{v} = -a\varkappa$$

folgt, erhält man den gesuchten, zur Lösung (a, b) von (2.8) gehörigen Schraubriß, indem man $\mathfrak{c}$ durch (2.13) erklärt und

$$(2.20)\qquad \mathfrak{s} = \varkappa^{-1}\mathfrak{c}$$

setzt.

Zu den infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche gehören auch solche, bei denen die Fläche starr bewegt wird. Offenbar ist das dann und nur dann der Fall, wenn der Schraubriß von u und v unabhängig ist. Also:

Setzt man in (2.7) *für* $\mathfrak{s}$ *beliebige konstante Sechservektoren ein, so erhält man die Lösungen von* (2.8), *die zu den starren Bewegungen der Fläche gehören. Kennzeichnend für diese Lösungen ist nach* (2.14)

$$(2.21)\qquad h = k = 0.$$

Ist für eine infinitesimale Verbiegung G eine Konstante, so handelt es sich nach (2.17) stets dann um eine Bewegung, wenn a und b nicht verschwinden. Auch isolierte Nullstellen von a oder b stören natürlich nicht, da dort aus Stetigkeitsgründen immer noch (2.21) gilt. Verschwindet in einer Umgebung einer Stelle (u, v) etwa b überall, so folgt aus (2.8), daß dort $\beta a = 0$ gilt. Ist auch $a = 0$, so bleibt die Fläche in dieser Umgebung fest, also wieder starr. Eine Ausnahme tritt jedoch ein, wenn $\beta = 0$. In diesem Fall sind die u-Kurven der Fläche in der fraglichen Umgebung Geraden, und $\mathfrak{g}$ fällt längs dieser Geraden. Also:

Wenn für eine Verbiegung G *eine Konstante ist, so ist sie überall dort eine Bewegung, wo nicht der Ausnahmefall vorliegt, daß die Fläche eine Regelfläche ist und die durch* (2.11) *erklärte Gerade* $\mathfrak{g}$ *mit einer Erzeugenden der Fläche zusammenfällt.*

Bei elliptisch gekrümmten Flächen kann offenbar der Ausnahmefall nicht eintreten.

Infinitesimale Verbiegungen lassen sich bekanntlich linear zusammensetzen; sind $\mathfrak{s}_1(u, v)$ und $\mathfrak{s}_2(u, v)$ Schraubrisse, so gilt das gleiche für

$$(2.22)\qquad \lambda_1\mathfrak{s}_1 + \lambda_2\mathfrak{s}_2$$

[11]) Die letzte Gleichung wird hier nicht verwendet und ist nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Die Beziehungen (2.18) sind enthalten in (79.17) und (79.19) aus PD II, wenn die halbinvariante Differentiation sich auf die gewöhnliche reduziert, also $\lambda = \mu = 1$, $\sigma = \tau = 0$.

mit beliebigen konstanten λ_1, λ_2. Gehört zu $\mathfrak{F}_1$ die Lösung (a_1, b_1) der Grundgleichungen, zu $\mathfrak{F}_2$ die Lösung (a_2, b_2), so gehört zu (2.22) nach (2.7) die Lösung

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2. \tag{2.23}$$

Ebenso setzen sich h und k linear homogen zusammen.

Zwei infinitesimale Verbiegungen unterscheiden sich dann und nur dann um eine Bewegung, wenn h und k für sie die gleichen Funktionen von u und v sind.

Vermerken wir schließlich noch, daß aus (2.14) die Integrierbarkeitsbedingungen

$$h_v = \beta k, \quad k_v = \gamma h \tag{2.24}$$

folgen.

§ 3. Spezielle Flächenklassen.

Sehen wir uns noch einige Sonderfälle an! Für die Quadriken ist $\beta = \gamma = 0$, für sie lassen sich also sämtliche Lösungen von (2.8) sofort angeben und damit sämtliche infinitesimale Verbiegungen integralfrei bestimmen. Wir kommen darauf in § 4 zurück.

Betrachten wir eine beliebige Regelfläche. Denkt man sie sich auf ihre Asymptotenlinien bezogen, so gilt bei geeigneter Normung für die Vierervektoren $\mathfrak{x}(u, v)$ der Flächenpunkte eine Darstellung der Form

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{q}(v) + u\,\mathfrak{r}(v) \tag{3.1}$$

mit

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{q}', \mathfrak{r}') = \varkappa = \text{const} \tag{3.2}$$

und

$$\mathfrak{q}'' = Q\,\mathfrak{q} + R\,\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{r}'' = S\,\mathfrak{q} + T\,\mathfrak{r}. \tag{3.3}$$

Q, R, S und T sind hier Funktionen von v allein[12]).

Aus (3.1), (3.3) folgt, wenn wir

$$W = \tfrac{1}{2}(Q - T), \quad S = \tfrac{1}{2}(Q + T) \tag{3.4}$$

setzen

$$\beta = \varkappa = L = 0, \quad \gamma = R - 2Wu - Su^2, \quad \chi = Q + Su, \quad M = j. \tag{3.5}$$

Die allgemeine Lösung von (2.8) wird dann dargestellt durch

$$b = V(v), \quad a = -u^2 \int V R\,dv + 2u \int V W\,dv + \int V S\,dv + U(u), \tag{3.6}$$

wobei $U(u)$ eine beliebige Funktion von u allein, $V(v)$ eine solche von v allein ist.

Ist hier U eine Konstante, so handelt es sich um eine infinitesimale Mindingsche Flächenverbiegung, denn aus (3.5) und (3.6) folgt in diesem Fall

[12]) Vgl. etwa PD I, § 25. Um bei einer beliebig vorgegebenen Regelfläche zu einer solchen Darstellung zu gelangen, ist im allgemeinen die Integration einer Riccatischen Differentialgleichung erforderlich. Dagegen läßt sich nach G. Koenigs, Comptes Rendus **106**, 51—54 (1888) für die Gesamtheit aller auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Regelflächen eine integralfreie Darstellung angeben. Die Berechnung der infinitesimalen Verbiegungen daraus fordert im Einzelfall nur noch Quadraturen.

$h=0$; nach (2.14) ist dann der Schraubriß der Verbiegung längs jeder Erzeugenden der Regelfläche fest, so daß diese Geraden bei der Verbiegung starr bewegt werden.

Kennt man die MINDINGschen infinitesimalen Verbiegungen einer auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Regelfläche, so lassen sich offenbar die übrigen integralfrei bestimmen.

Eine andere interessante Klasse von infinitesimalen Verbiegungen einer Regelfläche sind die, für die $V=0$ ist. Die zugehörige W-Kongruenz entartet dann in die Regelfläche selbst. Die zugehörigen Verbiegungen sind dadurch ausgezeichnet, daß der Verschiebungsvektor in jedem Punkt der Fläche auf der hindurchgehenden Erzeugenden senkrecht steht. Offenbar lassen sich diese Verbiegungen bei jeder auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Regelfläche integralfrei bestimmen.

Jede infinitesimale Verbiegung einer Regelfläche setzt sich linear zusammen aus einer MINDINGschen *und einer der zuletzt betrachteten Art.*

Gehört die Regelfläche einer linearen Kongruenz an, so sind R, W und S konstante Vielfache der gleichen Funktion von v. Man kann dann

$$a = V(v)\,\gamma \tag{3.7}$$

setzen mit beliebigem $V(v)$ und b durch Differentiation berechnen.

Sämtliche infinitesimale Verbiegungen einer Kongruenzregelfläche lassen sich daher integralfrei darstellen[13]).

Die Flächen, für die

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{V(v)}{U(u)} \tag{3.8}$$

ist, nennt man bekanntlich isotherm-asymptotisch. Für diese Flächen folgt aus (2.24), daß für jede infinitesimale Verbiegung

$$a = U\,h, \qquad b = -\,V\,k \tag{3.9}$$

eine im allgemeinen von (a, b) wesentlich verschiedene Lösung von (2.8) darstellt[14]). Wir nennen sie die aus (a, b) *derivierte* Lösung und die zugehörige Verbiegung die *derivierte Verbiegung*. Die Fläche bleibt bei ihr dann und nur dann fest, wenn (a, b) zu einer Bewegung der Fläche gehört.

Kennt man eine infinitesimale Verbiegung einer isotherm-asymptotischen Fläche, so läßt sich daraus eine im allgemeinen unendliche Folge weiterer Verbiegungen integralfrei herleiten.

Die Derivierte einer Verbiegung fällt dann und nur dann mit dieser selbst zusammen, wenn

$$h = c\,a, \qquad k = -\,c\,b \tag{3.10}$$

[13]) Das gilt zunächst nur, wenn die Fläche auf Asymptotenlinienparameter bezogen vorgegeben war. Wie hier nicht gezeigt werden soll, lassen sich aber sämtliche auf Asymptotenlinienparameter bezogene Kongruenzregelflächen integralfrei in der Form

$$\mathfrak{x}(u,v) = \{vF' - 2F + uv,\quad F' - u,\quad v - \varepsilon u\,(vF' - 2F),\quad 1 - \varepsilon u F'\} \tag{5.21}$$

mit beliebigem $F(v)$ und $\varepsilon = 0$ oder ± 1 darstellen.

mit konstantem c. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die zweite Brennfläche der zur Verbiegung gehörigen W-Kongruenz ebenfalls isotherm asymptotisch ist, diese aber keinem linearen Komplex angehört. Diese Verbiegungen und Kongruenzen hängen ab von sechs beliebigen Funktionen einer Veränderlichen[14]).

Besonderes Interesse verdienen in unserem Zusammenhang auch die projektiv abwickelbaren Flächen, vor allem ihre wichtigste Unterklasse, die R-Flächen. Zu jeder projektiven Abwicklung einer solchen Fläche gehören zwei berührende W-Kongruenzen, für die bei geeigneter Wahl der Asymptotenlinienparameter

$$b = \pm a \tag{3.11}$$

gilt. Bei dieser Normierung ist

$$\beta_v = \gamma_u , \tag{3.12}$$

und aus

$$\frac{a_u}{a} = \mp\gamma, \quad \frac{a_v}{a} = \mp\beta \tag{3.13}$$

läßt sich a mittels Quadraturen bestimmen.

Zu jeder projektiven Abwicklung einer R-Fläche gehören eindeutig zwei linear unabhängige metrische Abwicklungen, die sich mittels Quadraturen bestimmen lassen.

Aber auch in anderer Hinsicht sind unsere Flächen für die Flächenverbiegung wichtig. Bei der projektiven Abwicklung bleiben nämlich β und γ und daher auch die Lösungen von (2.7) erhalten.

Zu jeder infinitesimalen Verbiegung einer R-Fläche gehört daher eindeutig eine ebensolche Verbiegung jeder projektiven Abwicklung.

Wählt man die Parameter wie oben, so unterliegen die Flächeninvarianten L und M bei der zugehörigen projektiven Abwicklung Transformationen der Form

$$\hat{L} = L + C, \quad \hat{M} = M + C \tag{3.14}$$

mit konstantem C[15]).

Für die Invarianten h und k einer beliebigen Verbiegung gilt daher

$$\hat{h} = h - 2C(a_u + \beta b), \quad \hat{k} = k - 2C(b_v + \gamma a). \tag{3.15}$$

Zu jeder Bewegung der R-Fläche gehören daher für ihre projektiven Abwicklungen infinitesimale Verbiegungen, die keine Bewegungen sind. Diese lassen sich integralfrei berechnen, wenn die Parameterdarstellung der projektiven Abwicklung, bezogen auf u und v, bekannt ist.

Denn die zu Bewegungen gehörigen Lösungen von (2.8) erhält man ja aus der Parameterdarstellung der R-Fläche, wenn man in (2.7) für $\mathfrak{z}$ einen konstanten Vektor einsetzt.

---

[14]) Vgl. GPD I, § 51 und auch PD II, § 115, Aufgabe 1.

[15]) Vgl. etwa PD II, § 119.

Nach (3.15) sind h und k bei der Projektivabwicklung dann und nur dann invariant, wenn

$$a_u + \beta b = 0, \quad b_v + \gamma a = 0. \tag{3.16}$$

Zusammen mit (2.8) bilden diese Gleichungen wegen (3.12) ein vollständig integrierbares System. Da diesem die Lösungen (3.11) von (2.8) genügen, sind sämtliche Lösungen Linearkombinationen von diesen, denn sie hängen nur von zwei Parametern (den Anfangswerten a und b) ab.

Nur für die Verbiegungen, die nach dem erstgenannten Satz zu den projektiven Abwicklungen der R-Fläche gehören und für die daraus zusammengesetzten, sind h und k bei diesen invariant.

Ist unsere R-Fläche gleichzeitig isotherm-asymptotisch, so folgt übrigens aus (3.15) und (3.9), daß bei unserer Parameterwahl für jede Verbiegung auch

$$\mathring{a} = U(a_u + \beta b), \quad \mathring{b} = -V(b_v + \gamma a) \tag{3.17}$$

eine Lösung von (2.8) darstellt. So ergibt sich für diese Flächen eine neue Möglichkeit, aus einer bekannten Verbiegung ohne Integrationen neue zu bekommen.

Insbesondere liegt der letztgenannte Fall vor bei den Flächen, die die für Nichtregelflächen höchstmögliche Vielfachheit von ∞^3 projektiven Verbiegungen zulassen, denn diese sind bekanntlich sämtlich isotherm asymptotisch.

Von besonderem Interesse sind in diesem Zusammenhang die Koinzidenzflächen. Für sie sind bei geeigneter Wahl der Asymptotenlinienparameter β und γ Konstanten, jede hyperbolisch gekrümmte unter ihnen läßt sich auf die Rotationsfläche

$$x_3(x_1^2 + x_2^2) = 1, \tag{3.18}$$

jede elliptisch gekrümmte auf die CAYLEYsche Fläche

$$x_1 x_2 x_3 = 1 \tag{3.20}$$

projektiv abwickeln. Zu diesen Flächen gehören auch sämtliche Tetraedralflächen mit Gleichungen der Form

$$x_1^p x_2^q x_3^r = 1; \quad p, q, r \text{ konstant}. \tag{3.21}$$

Für a folgt in diesem Fall aus (2.8) die Differentialgleichung

$$a_{uv} = K a, \quad K = \text{const}, \tag{3.22}$$

die bei elliptisch gekrümmten Flächen die Form

$$\Delta a = K a, \quad K = \text{const} \tag{3.23}$$

annimmt. Δ ist hier der LAPLACEsche Operator.

Bekanntlich läßt sich die allgemeine Integration einer Gleichung vom LAPLACEschen Typus, also auch eines Gleichungssystems vom Typus der Grundgleichungen (2.8), mittels Quadraturen durchführen, wenn die zugehörige LAPLACE-Kette abbricht[16]). Nun hat (2.8) im wesentlichen die gleiche Gestalt

wie (2.6); der Unterschied in den Vorzeichen läßt sich beseitigen, indem man etwa $\mathfrak{v}$ durch $-\mathfrak{v}$ ersetzt. Wir können also auch die von den Flächen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ im Geradenraum erzeugte LAPLACE-Kette betrachten, das ist die GODEAUX-Kette der Fläche[16]).

Für jede Fläche mit abbrechender GODEAUX-*Kette lassen sich sämtliche infinitesimale Verbiegungen mittels Quadraturen bestimmen.*

Hierzu gehören Flächenklassen, die von beliebig vielen beliebigen Funktionen einer Veränderlichen abhängen. Die einfachste Unterklassen bilden die Regelflächen, die nächste enthält die Flächen, bei denen die Tangenten der Asymptotenlinien einer Schar jeweils einem linearen Komplex angehören.

Schließlich sei noch der Satz erwähnt:

Kennt man eine infinitesimale Verbiegung einer Brennfläche einer W-Kongruenz, so läßt sich daraus mittels einer Quadratur eine solche der anderen Brennfläche herleiten[17]).

§ 4. Verbiegung der Quadriken.

Zum Schluß sei noch gezeigt, daß unsere projektive Betrachtungsweise auch zur Verbiegungstheorie der Quadriken einen besonders bequemen Zugang liefert. Wir gehen aus von der Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(u, v) = \{1, u, v, uv\} \tag{4.1}$$

für die Fläche mit der Gleichung

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0. \tag{4.2}$$

Da hier

$$\mathfrak{x}_u = \{0, 1, 0, v\}, \quad \mathfrak{x}_v = \{0, 0, 1, u\}, \quad \mathfrak{x}_{uv} = \{0, 0, 0, 1\}, \tag{4.3}$$

ist $\varkappa = 1$ und findet man

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \{1, 0, v, v^2, 0, -v\} \\ \mathfrak{v} &= \{0, 1, u, 0, -u^2, u\} \\ 2\mathfrak{a} &= \{0, 0, 1, 2v, 0, -1\} \\ 2\mathfrak{b} &= \{0, 0, 1, 0, -2u, 1\} \\ \mathfrak{p} &= \{0, 0, 0, 1, 0, 0\} \\ \mathfrak{q} &= \{0, 0, 0, 0, -1, 0\}. \end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

Da $\mathfrak{x}_{uu} = \mathfrak{x}_{vv} = 0$ ist, folgt weiter

$$\beta = \gamma = 0, \quad \varkappa = \chi = 0, \quad L = M = 0. \tag{4.5}$$

[16]) Vgl. PD II, §§ 128—129.

[17]) Vgl. etwa GPD I, § 50. Der Satz hängt mit BIANCHIS Vertauschungstheorem für die berührenden W-Kongruenzen einer Fläche zusammen.

(2.8) nimmt also hier die Form an

$$a_v = b_u = 0; \tag{4.6}$$

a hängt also nur von u, b nur von v ab.

Nach (2.13), (2.20) ist

$$\left\{\begin{array}{l} 2\hat{\mathfrak{s}} = \{b_{vv}, a_{uu}, u\,a_{uu} - a_u + v\,b_{vv} - b_v,\ v^2 b_{vv} - 2v\,b_v + 2b, \\ \qquad -u^2 a_{uu} + 2u\,a_u - 2a,\ u\,a_{uu} - a_u - v\,b_{vv} + b_v\}, \end{array}\right. \tag{4.7}$$

und aus (2.15), (2.16) findet man

$$2G = -\,a\,a_{uu} + \tfrac{1}{2}\,a_u^2 + b\,b_{vv} - \tfrac{1}{2}\,b_v^2, \tag{4.8}$$

$$h = \tfrac{1}{2}\,a_{uuu}, \qquad k = \tfrac{1}{2}\,b_{vvv}. \tag{4.9}$$

Aus (4.7) sieht man, daß — wie schon DARBOUX hervorgehoben hat — jede infinitesimale Verbiegung einer Quadrik mit reellen Geraden sich linear zusammensetzen läßt aus zwei speziellen, für die die zugehörige W-Kongruenz in eine Geradenschar der Quadrik ausartet.

Faßt man x_1, x_2, x_3 als Cartesische Koordinaten auf, so geben die Formeln die allgemeinste Verbiegung des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$; sie hat den Drehriß

$$\mathfrak{r} = \{b_{vv}, a_{uu}, u\,a_{uu} - a_u + v\,b_{vv} - b_v\} \tag{4.10}$$

und den Translationsriß

$$\hat{\mathfrak{s}} = \{v^2 b_{vv} - 2v\,b_v + 2b,\ -u^2 a_{uu} + 2u\,a_u - 2a,\ u\,a_{uu} - a_u - v\,b_{vv} + b_v\}. \tag{4.11}$$

Beide sind Translationsflächen mit ebenen erzeugenden Kurven, die eine Parameterdarstellung von der Gestalt

$$\{f', t\,f' - f, 0\} \tag{4.12}$$

mit beliebigem $f(t)$ besitzen. Die Parameterkurven der Fläche (4.10) erhält man nämlich, wenn man für f entweder a_u oder b_v einsetzt; für die von (4.11) ist

$$f = -\,2a + u\,a_u, \qquad f = -\,2b + v\,b_v. \tag{4.13}$$

Um zu den infinitesimalen Verbiegungen der Einheitskugel zu gelangen, wählen wir u und v konjugiert komplex und führen die Koordinatentransformation durch

$$2\check{x}_0 = x_0 + x_3,\ 2\check{x}_1 = x_1 + x_2,\ 2i\,\check{x}_2 = x_1 - x_2,\ 2\check{x}_3 = x_0 - x_3. \tag{4.14}$$

Die Gl. (4.2) geht dabei über in

$$0 = -\,x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{4.14}$$

a und b sind jetzt differenzierbare Funktionen einer komplexen Veränderlichen, also reguläre analytische Funktionen. Damit wir reelle Schraubrisse erhalten, müssen die beiden ersten Komponenten von $\mathfrak{r}$ und $\hat{\mathfrak{s}}$ in (4.10) und (4.11) jeweils konjugiert komplex, die dritten Komponenten reell sein. Daher

müssen a und b für konjugierte komplexe u und v konjugiert komplex sein:

$$a = f(u), \qquad b = \overline{f}(\overline{u}). \tag{4.15}$$

Zu jeder infinitesimalen Verbiegung eines Teiles einer Kugelfläche gehört eine im entsprechenden Gebiet der komplexen u-Ebene reguläre analytische Funktion $f(u)$ und umgekehrt.

Die Verbiegung ist nach (4.9) *dann und nur dann eine Bewegung, wenn f ein quadratisches Polynom ist.*

Setzt man

$$u = \xi + i\eta, \tag{4.16}$$

so sind ξ und η bekanntlich Cartesische Koordinaten der stereographischen Projektion der Kugel (4.14) aus dem Nordpol auf die Äquatorebene.

Dem Nordpol entspricht dabei der Punkt $u = \infty$ der u-Ebene.

Jede ganze Funktion liefert eine infinitesimale Verbiegung der im Nordpol punktierten Kugelfläche.

Ebenso leicht beweist man, daß die volle Kugelfläche infinitesimal unverbiegbar ist:

Jede infinitesimale Verbiegung der Kugelfläche mit differenzierbarem Schraubriß ist eine Bewegung.

Denn nach (2.7) gehört zu ihr eine für endliche u überall reguläre Funktion $a = f(u)$. Da aber die Komponenten des Schraubrisses beschränkt sind, gilt das nach (4.10) auch für f_{uu}, also f''. Diese zweite Ableitung ist daher konstant, es ist $f''' = h = 0$ und unsere Verbiegung ist eine Bewegung, wie gezeigt werden sollte.

Diese Sätze gelten natürlich auch für projektiv gleichwertige Flächen, es folgt die Unverbiegbarkeit des Ellipsoids und die Verbiegbarkeit des punktierten Ellipsoids, des elliptischen Paraboloids und von jeder Schale des zweischaligen Hyperboloids.

Aus (4.10) folgt weiter der Satz:

Wenn bei einer infinitesimalen Verbiegung von einem Teilstück eines elliptischen Paraboloids die Stellen, an denen der Drehvektor zur Achse der Fläche parallel ist, einen zum Flächenstück gehörigen Häufungspunkt besitzen, so ist die Verbiegung eine Bewegung[18]).

Denn an diesen Stellen ist $a_{uu} = b_{vv} = 0$, es handelt sich also um Nullstellen von f''; wenn diese sich aber irgendwo häufen, so verschwindet diese Funktion aber bekanntlich überall in ihrem Definitionsgebiet.

Natürlich kann man leicht weitere Starrheitssätze dieser Art formulieren und beweisen.

[18]) Ähnliche Sätze bei Minagawa, T., u. T. Rado: Osaka Math. J. **4**, 241—285 (1952). Den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich Herrn K. Grotemeyer. Die dort zugrunde gelegten Gln. (6), (7), (8) gelten für beliebige Parameter und entsprechen für Asymptotenlinienparametern unsern Gln. (2.8). Bei ihrer Verwendung kommt man mit zweimaliger stetiger Differenzierbarkeit der Fläche aus, verzichtet aber auf projektive Invarianz des Formelapparates.

Für die Geradenkoordinaten folgen aus (4.14) die Transformationsformeln

$$(4.17)\qquad \begin{cases} 4\check{g}_{01} = g_{01} + g_{02} + g_{31} - g_{23} \\ 4i\check{g}_{02} = g_{01} - g_{02} + g_{31} + g_{23} \\ 2\check{g}_{03} = -g_{03} \\ 4i\check{g}_{23} = -g_{01} + g_{02} + g_{31} + g_{23} \\ 4\check{g}_{31} = g_{01} + g_{02} - g_{31} + g_{23} \\ 2i\check{g}_{12} = -g_{12}. \end{cases}$$

Wendet man sie auf den Schraubriß (4.7) an, so erhält man für den Drehriß und den Translationsriß der allgemeinsten Verbiegung von Kugelflächenstücke die Darstellung

$$(4.18)\qquad \mathfrak{r} = \begin{cases} \Re\left[-f + uf' + \frac{1-u^2}{2}f''\right] \\ \Re\left[i\left(f - uf' + \frac{1+u^2}{2}f''\right)\right] \\ \Re[f' - uf''], \end{cases}$$

$$(4.19)\qquad \check{\mathfrak{s}} = \begin{cases} \Re\left[i\left(f - uf' + \frac{-1+u^2}{2}f''\right)\right] \\ \Re\left[f - uf' + \frac{1+u^2}{2}f''\right] \\ \Re[i(-f' + uf'')]. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich die bekannte Tatsache, daß beide Risse assoziierte Minimalflächen sind; man erhält $\check{\mathfrak{s}}$, indem man in der Darstellung von $\mathfrak{r}$ die Funktion f durch if ersetzt.

Wir erwähnen diese Tatsache hier, weil sie sich verallgemeinern läßt auf die Relativgeometrie in bezug auf einen konvexen Eichkörper nach E. MÜLLER und W. SÜSS.

Zu jeder Euklidischen Verbiegung eines Teiles der Eichfläche gehört ein Paar von adjungierten Relativminimalflächen in bezug auf diese Eichfläche, das sich integrallos durch Größen der Eichfläche darstellen läßt, wenn man die zugehörige Lösung der Grundgleichungen (2.8) *für die Eichfläche kennt.*

Auf diese Dinge, die in engstem Zusammenhang mit dem zur Verbiegung gehörigen DARBOUXschen Flächenkranz stehen, gehen wir hier nicht näher ein; wir erwähnen nur, daß die fraglichen Paare von Relativminimalflächen, wenn man ihre Koordinaten zum Sechservektor des Schraubrisses zusammenfaßt, invariant sind bei projektiver Abbildung des Eichkörpers.

Freiburg i. B., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. November 1954.)

Grotemeyer, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 17—22 (1955)

Die eindeutige Bestimmung einer Klasse von offenen, vollständigen Flächen durch die Metrik.

Herrn Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

K. P. Grotemeyer.

1. Nach G. Herglotz [1] sind zwei dreimal stetig differenzierbare[1]), isometrische Eiflächen im dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 kongruent oder symmetrisch. Man kann daher die Frage stellen, ob es konvexe Flächen gibt, die sich ins Unendliche erstrecken („unendliche Eiflächen") und durch die Metrik eindeutig bestimmt sind. Wir wollen dabei zunächst Flächen betrachten, die im „Endlichen" weder einen Rand noch eine Singularität besitzen, die dreimal stetig differenzierbar und positiv gekrümmt sind. Kurz gesagt wollen wir offene, vollständige[2]), dreimal stetig differenzierbare Flächen mit positiver Gaussscher Krümmung K im E_3 betrachten.

2. Ganz ähnlich wie J. Hadamard [4] die möglichen Gestalten der geschlossenen (vollständigen) Flächen mit $K>0$ im E_3 als „Eiflächen" beschrieben hat, so lassen sich auch, wie J. J. Stoker [5] gezeigt hat, die gestaltlichen Verhältnisse der offenen, vollständigen konvexen Flächen im E_3 beschreiben[3]). Danach besitzt nämlich jede Fläche der genannten Klasse in mindestens einer Richtung eine einwertige Projektion. [Wählt man diese Richtung als z-Richtung eines x, y, z-Koordinatensystems im E_3, so läßt sich jede Fläche der genannten Klasse in der Form $z=f(x, y)$ darstellen mit eindeutigem $f(x, y)$.] Ferner liegt das sphärische Normalenbild einer solchen Fläche $\mathfrak{H}$ ganz auf einer Halbkugel; woraus man leicht auf

$$\iint^{(\mathfrak{H})} K\, do \leq 2\pi$$[4])

schließen kann.

[1]) Nach A. Wintner [2] läßt sich diese Differenzierbarkeitsvoraussetzung verringern. Die gleiche von A. Wintner angewandte Methode dürfte auch bei anderen Kongruenzsätzen von isometrischen Flächen zum Ziele führen.

[2]) Vgl. dazu H. Hopf u. W. Rinow [3]. Eine Fläche heißt vollständig, wenn es auf derselben keine divergente und beschränkte Punktfolge gibt.

[3]) Stoker klassifiziert die gestaltlichen Verhältnisse aller vollständigen, konvexen Flächen im E_3. Er gewinnt dadurch das Hadamardsche Resultat mit.

[4]) Man erkennt übrigens leicht, daß dann und nur dann für eine Fläche $\mathfrak{H}$ der oben definierten Klasse $\iint^{(\mathfrak{H})} K\, do = 2\pi$ ist, falls in der für $\mathfrak{H}$ möglichen Darstellung $z=f(x, y)$ $\sqrt{x^2+y^2}\cdot z^{-1}\to 0$ für alle Wege, die sich auf der Fläche $\mathfrak{H}$ ins Unendliche erstrecken.

3. Wir wollen jetzt folgenden Kongruenzsatz beweisen:

Satz A: *Es sei* $\mathfrak{U}$ *eine offene, vollständige Fläche, die dreimal stetig differenzierbar ist und positive* GAUSSsche *Krümmung* K *besitzt. Ferner sei*

$$\iint^{(\mathfrak{U})} K\, do = 2\pi.$$

Dann ist jede zu $\mathfrak{U}$ *isometrische Fläche* $\mathfrak{U}^*$, *die ebenfalls dreimal stetig differenzierbar ist, zu* $\mathfrak{U}$ *kongruent oder symmetrisch.*

Beweis[5]). Es sei $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor und ξ der Normaleneinheitsvektor der Fläche $\mathfrak{U}$. ξ weise in das „Innere" von $\mathfrak{U}$. (Dann ist neben K auch die mittlere Krümmung H positiv; d.h. der Tensor B_{ik} der zweiten Fundamentalform von $\mathfrak{U}$ ist positiv definit.) Ferner soll $\mathfrak{e}$ der Einheitsvektor in Richtung der einwertigen Projektion sein. Wir können daher auf Grund des STOKERschen Ergebnisses das Vorzeichen von $\mathfrak{e}$ so wählen, daß

$$(\mathfrak{e}\,\xi) \geq 0 \tag{1}$$

wird auf der Fläche $\mathfrak{U}$.

Aus $\iint^{(\mathfrak{U})} K\, do = 2\pi$ folgt, daß das sphärische Normalenbild von $\mathfrak{U}$ von einem Großkreis berandet wird[6]). Als isometrisches dreimal stetig differenzierbares Bild von $\mathfrak{U}$ ist auch die Fläche $\mathfrak{U}^*$ eine offene, vollständige Fläche[7]), und auch das sphärische Normalenbild dieser Fläche wird von einem Großkreis berandet. Wir wollen jetzt den Integralsatz

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\, \xi\, do = \oint \{(a - a^*)\, \dot{\mathfrak{x}} + (b - b^*)\, \eta\}\, ds \tag{2}$$

anwenden. Vgl. [7], [9]. Dazu legen wir zunächst die Tangentialebene T_0 an die Fläche $\mathfrak{U}$, die den Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ besitzt. Mit T_z bezeichnen wir diejenige Ebene, die parallel zu T_0 ist im Abstande $z \geq 0$ und $\mathfrak{U}$ trifft. Das Flächenstück von $\mathfrak{U}$, welches zwischen T_0 und T_z liegt, heiße $\mathfrak{U}_z$. Die ebene Randkurve von $\mathfrak{U}_z$ werde mit $\partial\mathfrak{U}_z$ bezeichnet. Auf dieses Flächenstück $\mathfrak{U}_z$[8]) und das diesem Gebiet isometrisch entsprechende Gebiet auf der Fläche $\mathfrak{U}^*$ wenden wir jetzt (2) an, nachdem man den Integralsatz skalar mit $\mathfrak{e}$ multipliziert hat:

$$\iint^{(\mathfrak{U}_z)} \frac{\|A_{ik}\|}{g}\, (\mathfrak{e}\,\xi)\, do = \oint^{\partial\mathfrak{U}_z} (b - b^*)\, (\mathfrak{e}\,\eta)\, ds. \tag{3}$$

---

[5]) Wegen der Bezeichnungsweise sei auf [6], [7], [8] verwiesen.

[6]) $\mathfrak{e}$ steht senkrecht auf der Ebene dieses Großkreises und liegt dadurch bis auf das Vorzeichen fest.

[7]) $\mathfrak{U}^*$ besitzt die gleichen Eigenschaften wie $\mathfrak{U}$. Daher läßt sich auf $\mathfrak{U}^*$ ebenfalls die Normalenrichtung so festlegen, daß B^*_{ik}, der Tensor der zweiten Fundamentalform von $\mathfrak{U}^*$, positiv definit wird.

[8]) $\mathfrak{U}_z$ ist im Sinne von [8] eine ebenrandige Mütze. Man kann daher $\mathfrak{U}$ auch als eine „unendliche Mütze" auffassen.

Für das links stehende Oberflächenintegral wollen wir $G(\mathfrak{U}_z)$ und für das Randintegral I_z schreiben. Da auf $\mathfrak{U}$ stets $K>0$ ist, so ist wegen $||A_{ik}|| \leqq 0$ [7] und nach (1)

$$G(\mathfrak{U}_z) \leqq 0; \quad I_z \leqq 0. \tag{4}$$

Es sei jetzt $0 \leqq z_1 \leqq z$, und $\mathfrak{U}_z - \mathfrak{U}_{z_1}$ bezeichne das zwischen T_z und T_{z_1} gelegene Flächenstück von $\mathfrak{U}$. Dann ist wie in (4)

$$G(\mathfrak{U}_z - \mathfrak{U}_{z_1}) = I_z - I_{z_1} \leqq 0; \tag{5}$$

woraus nach (4) folgt:

$$I_z \leqq I_{z_1} \leqq 0 \quad \text{mit} \quad (0 \leqq z_1 \leqq z). \tag{6}$$

Wir wollen jetzt das folgende Lemma benutzen:

Lemma: *Es gilt* $I_z \to 0$ *bei* $z \to \infty$.

Nach Gl. (6) folgt dann das Verschwinden von I_z für alle $z \geqq 0$. Es ist also auch

$$G(\mathfrak{U}_z) = \iint^{(\mathfrak{U}_z)} \frac{||A_{ik}||}{g} (\mathfrak{e}\,\xi)\, do = 0$$

für alle $z \geqq 0$. Die $\mathfrak{U}_z$ erschöpfen aber für $z \to \infty$ die Fläche $\mathfrak{U}$. Daher ist, weil der Integrand nirgends positiv ist, $||A_{ik}|| = 0$ auf $\mathfrak{U}$. Dann ist aber notwendig sogar $A_{ik} = B_{ik} - B^*_{ik} = 0$, woraus die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ folgt. Damit ist der Satz A bewiesen.

Beweis des Lemmas. Es ist

$$0 \leqq -I_z = -\oint^{\partial \mathfrak{U}_z} (b - b^*)\,(\mathfrak{e}\,\eta)\, ds.$$

$\mathfrak{e}$ fällt mit der Binormalen $\mathfrak{b}$ von $\partial \mathfrak{U}_z$ zusammen:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{b} = \frac{1}{|k|}\{b\,\eta + c\,\xi\} = -\sin\varphi\,\eta + \cos\varphi\,\xi$$

vgl. [8]. $|k| \sin\varphi = -b \geqq 0$; $|k| \cos\varphi = c \geqq 0$. [Weil B_{ik} und B^*_{ik} positiv definit sind, ist $b \leqq 0$, $b^* \leqq 0$. Aus (1) folgt $c \geqq 0$.]

Wir können daher schreiben:

$$0 \leqq -I_z = \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} (b - b^*) \sin\varphi\, ds. \tag{7}$$

Führen wir jetzt noch die Bogenlänge σ^* des sphärischen Normalenbildes von $\mathfrak{U}^*$ ein: $\frac{d\sigma^*}{ds} = |\sqrt{a^{*2} + b^{*2}}|$, dann folgt aus (7)

$$0 \leqq -I_z \leqq \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* - \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} |k| \sin^2\varphi\, ds$$

oder

$$0 \leqq -I_z \leqq \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* - \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} |k|\, ds + \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} |k| \cos^2\varphi\, ds.$$

Nun ist $\overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} |k|\, ds = 2\pi$ und wegen $c = |k| \cos\varphi \geqq 0$ folgt

$$0 \leqq -I_z \leqq \overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} d\sigma^* - 2\pi + \overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} c\, ds. \tag{8}$$

Benutzen wir jetzt noch die Formel von GAUSS-BONNET für unser Flächenstück $\mathfrak{U}_z$:

$$\overset{(\mathfrak{U}_z)}{\iint} K\, do = 2\pi - \overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} c\, ds,$$

so erhalten wir schließlich

$$0 \leqq -I_z \leqq \overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} d\sigma^* - \overset{(\mathfrak{U}_z)}{\iint} K\, do. \tag{9}$$

Da das sphärische Normalenbild der Fläche $\mathfrak{U}^*$ von einem Großkreis berandet wird, so gilt

$$\lim_{z\to\infty} \overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} d\sigma^* = 2\pi.^{9})$$

Weiter ist ja

$$\lim_{z\to\infty} \overset{(\mathfrak{U}_z)}{\iint} K\, do = 2\pi.$$

Aus (9) erhalten wir daher

$$I_z \to 0 \quad \text{bei} \quad z \to \infty. \tag{10}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

4. Der vorliegende Satz A ist unter zusätzlicher Bedingung[10]) mit gänzlich anderen Methoden zuerst von A. D. ALEKSANDROV und A. V. POGORELOV [*10*] für Rotationsflächen der hier betrachteten Flächenklasse bewiesen worden. Später hat dann POGORELOV den Satz unter Beibehaltung der zusätzlichen Bedingung bei schwächeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und beliebigen Flächen der hier behandelten Klasse bewiesen. Allerdings sind diese Untersuchungen recht umfangreich. Vgl. [*11*].

5. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die hier behandelten „unendlichen Eiflächen" mit 2π als curvatura integra im Gegensatz zu den „endlichen Eiflächen" im allgemeinen infinitesimal verbiegbar sind. Das zeigt schon das elliptische Paraboloid $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Die infinitesimale Verbiegung führt hier

---

[9]) Man kann übrigens leicht zeigen, daß

$$2\pi\sqrt{1 - \min_{\partial \mathfrak{U}_z} (e^* \xi^*)^2} \leqq \overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} d\sigma^* \leq 2\pi$$

ist, woraus ebenfalls sofort $\lim\limits_{z\to\infty} \overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} d\sigma^* = 2\pi$ abzulesen ist.

[10]) Diese läßt sich in der hier benutzten Bezeichnungsweise so darstellen:

$$\overset{\partial \mathfrak{U}_z}{\oint} ds \cdot \left\{ 2\pi - \overset{(\mathfrak{U}_z)}{\iint} K do \right\} \to 0 \quad \text{bei} \quad z \to \infty.$$

auf die Potentialgleichung $\zeta_{xx}+\zeta_{yy}=0$[11]). Jeder in der ganzen x, y-Ebene regulären, nicht konstanten Lösung entspricht eine nicht triviale infinitesimale Verbiegung des Paraboloids.

6. Naturgemäß stellt sich jetzt die Frage nach der eindeutigen Bestimmtheit durch die Metrik von offenen, vollständigen Flächen mit positiver Gaussscher Krümmung, für die $\iint K\,do<2\pi$ ist. Von diesen Flächen hat Olovjanišnikov [*14*] gezeigt, daß sie ohne zusätzliche Bedingungen nicht eindeutig bestimmt sind. Er gab sogar den „Willkürgrad" beim Aufbau einer zu einer gegebenen isometrischen Fläche dieser Klasse an. Als wesentlichstes Hilfsmittel wird dabei der *Grenzkegel*[12]) benutzt, der wegen $\iint K\,do<2\pi$ sicher nicht entartet ist. Der Willkürgrad beim Aufbau einer, zu einer gegebenen isometrischen Fläche, besteht nun im wesentlichen darin, daß man eine konvexe Kegelfläche vorschreiben darf und dazu dann eine zur gegebenen isometrische Fläche konstruieren kann, die diesen Kegel als Grenzkegel besitzt. Allerdings kann dieser Kegel nicht gänzlich willkürlich vorgeschrieben werden, sondern er muß so beschaffen sein, daß sein sphärisches Normalenbild (d.i. eine Kurve) auf der Kugel ein Gebiet begrenzt, das den gleichen Inhalt besitzt wie das sphärische Normalenbild der gegebenen Fläche, also gleich $\iint K\,do$ ist. Dieses Ergebnis von Olovjanišnikov gibt natürlich jetzt Veranlassung, die Frage zu stellen, ob eine solche Fläche durch den Grenzkegel eindeutig bestimmt ist. (Das heißt: Sind zwei isometrische Flächen der betrachteten Klasse mit kongruenten Grenzkegeln selbst kongruent oder symmetrisch?) Auf diese und ähnliche Fragen soll im Rahmen einer etwas größeren Untersuchung eingegangen werden.

7. Ganz ähnlich wie bei Kongruenzaussagen für andere Flächenklassen[13]) kann man auch hier den Satz A ausdehnen auf solche konvexen Flächen, die sich ins „Unendliche" erstrecken und im „Endlichen" von endlich vielen Rembsschen Rändern[14]) berandet werden. Allerdings müssen dann auch hier wieder die Fernpunkte der Flächen auf dem sphärischen Normalenbild einem Großkreis entsprechen. Für isometrische Rembssche Ränder verschwindet nämlich das Randintegral des Herglotzschen und das Randintegral des hier verwandten Integralsatzes.

---

[11]) ζ ist die z-Komponente des Deformationsvektors $\delta\mathfrak{x}$ beim infinitesimalen Verbiegungsprozeß: $\zeta=(\mathfrak{e}\,\delta\mathfrak{x})$. — Setzt man dagegen voraus, daß ζ beschränkt sein soll auf der gesamten Fläche, so folgt aus einem Satz von S. Bernstein [*12*], daß alle offenen, vollständigen Flächen mit $K>0$ die über der ganzen x, y-Ebene definiert sind, gegenüber diesen infinitesimalen Verbiegungen starr sind. Dieses Ergebnis stammt von J. J. Stoker [*13*].

[12]) Es sei $\mathfrak{P}$ eine unbeschränkte Fläche der betrachteten Klasse. Q sei ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}_n$ ist die durch zentrale Homothetie mit dem Zentrum Q und dem Ähnlichkeitsverhältnis $1/n$ aus $\mathfrak{P}$ hervorgehende Fläche. Man erkennt leicht, daß $\mathfrak{P}_n$ bei $n\to\infty$ in eine konvexe Kegelfläche, den sog. Grenzkegel übergeht.

[13]) Man denke etwa an den Kongruenzsatz für Eiflächen.

[14]) Das sind Randkurven eines Flächenstückes, längs denen der Flächennormalenvektor konstant ist. Längs einem Rembsschen Rand ist also stets $a=0$, $b=0$. Vgl. [*15*].

Literatur.

[1] Herglotz, G.: Über die Starrheit der Eiflächen. Abh. math. Sem. Hans. Univ. **15**, 127—129 (1943). — [2] Wintner, A.: On isometric surfaces. Amer. J. of Math. **74**, 198—214 (1952). — [3] Hopf, H., u. W. Rinow: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comm. Math. Helv. **3**, 209—225 (1931). — [4] Hadamard, J.: Bull. Soc. Math. de France **31**, 300—301 (1903). — [5] Stoker, J. J.: Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume. Comp. Math. **3**, 55—89 (1936). — [6] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 4. Aufl., Bd. I. Berlin 1945. — [7] Grotemeyer, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. **55**, 253—268 (1952). — [8] Grotemeyer, K. P.: Gleitverbiegungen und eindeutige Bestimmtheit isometrischer, ebenrandiger Mützen. Math. Z. **59**, 278—289 (1953). — [9] Grotemeyer, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand. Math. Z. **58**, 41—45 (1953). — [10] Aleksandrov, A. D., u. A. V. Pogorelov: Die eindeutige Bestimmtheit der konvexen Rotationsflächen. Mat. Sbornik, n. S. **26** (68), 183—204 (1948). — [11] Pogorelov, A. V.: Eindeutige Bestimmtheit konvexer Flächen. (Russisch.) Trudy Matem. Instit. Steklova. Moskau-Leningrad 1949. — [12] Bernstein, S.: Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Z. **26**, 551—558 (1927). — [13] Stoker, J. J.: Open convex surfaces which are rigid. Studies and Essays presented to R. Courant, S. 407ff. New York 1948. — [14] Olovjanišnikov, S. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen. (Russisch.) Mat. Sbornik, n. S. **18** (60), 429—440 (1946). — [15] Rembs, E.: Unverbiegbare offene Flächen. Ber. Akad. Wiss. Berlin **1930**, 123—133.

Institut für Geometrie der Technischen Universität Berlin.

(Eingegangen am 20. Oktober 1954.)

Barthel, W.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 23—36 (1955)

Variationsprobleme der Oberflächenfunktion in der Finslerschen Geometrie.

Herrn Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

Woldemar Barthel.

Einleitung.

In seiner Dissertation „Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen" und in späteren Arbeiten hat P. Finsler die geometrische Methode in den Vordergrund seiner Untersuchungen gestellt. So wird zunächst aus der *allgemeinen Metrik* eine *Winkelmessung* abgeleitet und mit diesen beiden Begriffen die Krümmung einer Kurve definiert. Die Flächenkrümmungen werden hiernach auf die Krümmungen gewisser Flächenkurven zurückgeführt.

Später hat H. Busemann aus der allgemeinen Längenmessung des Finslerschen Raumes einen *Inhaltsbegriff* abgeleitet, der allerdings nicht rein differentialgeometrischer Natur ist, da die Indikatrix in ihrer ganzen Ausdehnung benötigt wird. Das Inhaltsmaß erlaubt nun eine sehr einfache Verallgemeinerung der *Sinusfunktion*, wodurch wiederum die Grundlage für Krümmungsuntersuchungen von Kurven und Flächen gegeben ist. Während diesen Betrachtungen im Minkowskischen Raum (vgl. [6] und [11]) keine prinzipiellen Schwierigkeiten entgegenstehen, sind beim Übergang zur Finslerschen Geometrie noch weitgehende Modifikationen nötig. Natürlich läßt sich die erste Kurvenkrümmung in einfacher Weise festlegen, da eine Klasse von Kurven, denen man die Krümmung Null zuschreiben kann, unmittelbar gegeben ist, nämlich die Extremalen der Längenmessung (vgl. [8] und [12]). Will man jedoch die Flächenkrümmung entsprechend erklären, so fehlen jene Flächen, die wie die Ebenen des Minkowskischen Raumes als Norm für die Krümmungsdefinition dienen können. Diese Flächenklasse muß vielmehr erst festgelegt werden, was aber bereits die Wahl einer *Parallelverschiebung von Flächenelementen* für einen Spezialfall bedeutet.

Bei der Festlegung einer Parallelverschiebung erweist es sich als notwendig, streng zwischen dem Vergleich von *Vektoren* und dem von *Hyperflächenelementen* zu unterscheiden (vgl. [12]). Man wird also eine Vergleichsmöglichkeit für ein Vektorfeld X^i oder für ein Feld von Hyperflächenelementen, dargestellt als Vektordichten $\mathfrak{p}_i$ vom Gewicht (-1), durch *je ein invariantes Differential*

$$DX^i = dX^i + X^k \gamma_{k\ h}^{\ i}(x, X)\, dx^h \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D}\,\mathfrak{p}_i = d\,\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k \Gamma_{i\ h}^{k}(x, \mathfrak{p})\, dx^h$$

definieren, das in den gewöhnlichen Differentialen linear ist. Die Forderung der *Inhaltsinvarianz bei Parallelverschiebung* eines Vektors oder eines Hyperflächenelementes koppelt zwar die $\gamma_k{}^i{}_h$ mit der Längenfunktion und die $\Gamma_i{}^k{}_h$ mit der Oberflächenfunktion, bestimmt aber diese Koeffizienten noch nicht vollständig. Ein solches Differential von *Vektoren* wurde durch E. CARTAN in [4] aufgestellt. Ebenso gehört das in [9] eingeführte Vektordifferential zu der genannten Form. Dagegen besitzen die von E. CARTAN in [3] und F. ALARDIN in [5] benutzten Differentiale einer *Vektordichte* $\mathfrak{p}_i$, die dort allerdings in Vektorform $p_i = \sqrt{g(x, \mathfrak{p})}\, \mathfrak{p}_i$ geschrieben wird, die Gestalt

$$\mathcal{D}\, p_i = \left(\delta_i^h - p_i\, C^h(x, \mathfrak{p})\right) dp_h - p_k\, \Gamma_i{}^k{}_h(x, \mathfrak{p})\, dx^h.$$

Wie man erkennt, reduziert sich bei verschwindendem Zusatzterm $p_k\, \Gamma_i{}^k{}_h\, dx^h$ das invariante Differential nicht auf das gewöhnliche. Dies wird wohl durch das in [12] angegebene Differential

$$\mathcal{D}\, p_i = dp_i - p_k\, \Gamma_i{}^k{}_h(x, \mathfrak{p})\, dx^h$$

vermieden, aber die Vektorschreibweise $p_i = \mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{p}_i$ des Hyperflächenelementes bringt dennoch ein fremdes Element in die Betrachtungen.

In der vorliegenden Note soll ein FINSLERscher *Raum* dadurch erklärt werden, daß man *in einer Punkt-Mannigfaltigkeit die Inhaltsmessung für jede Dimension in allgemeiner Weise vorgibt.* Dies liegt nahe, weil die auf dem BUSEMANNschen Inhaltsbegriff beruhenden Untersuchungen weitgehend von dessen spezieller Konstruktion unabhängig sind. Die Inhaltsdefinition von BUSEMANN zeichnet also eine besondere Klasse von FINSLERschen Räumen aus; im allgemeinen wird jedoch zwischen den verschieden-dimensionalen Inhalten eine andere oder auch keine Bindung bestehen. Da sich unsere Darstellungen im wesentlichen mit der Oberflächenfunktion befassen sollen, werden ausschließlich die hierfür notwendigen Grundbegriffe entwickelt, nämlich die *invariante Differentiation längs eines Feldes von Hyperflächenelementen*, die aber zunächst nur bis auf einen schiefsymmetrischen Tensor $\Sigma_i^k{}_h(x, \mathfrak{p})$ bestimmt ist. Nunmehr können wir die Normalkrümmung eines Hyperflächenstreifens betrachten, die — unter einer schwachen Einschränkung für $\Sigma_i^k{}_h$ — eine *geometrische Darstellung der Hauptkrümmungen einer Hyperfläche* ermöglicht. Wieder unter allgemeinen Voraussetzungen untersuchen wir die auf der Oberflächenfunktion beruhenden Variationsprobleme und kommen so zu Bedingungen für die *Minimalhyperflächen*, die Lösungen des *isoperimetrischen Problems* sowie für die *Extremalen der Kurvenduallänge.* Schließlich sollen die Gleichungen in $\Sigma_i^k{}_h$ für die *Extremaleigenschaft der geodätischen Hyperflächen und der dualgeodätischen Linien* aufgestellt[1]) und eine Parallelverschiebung angegeben werden, die diese Eigenschaften besitzt und auch die oben erwähnte geometrische Deutung der Hauptkrümmungen

[1]) Unter anderen Voraussetzungen ist der Autoparallelismus der Extremalkurven zuerst von F. ALARDIN in [5] untersucht worden, während das allgemeine Prinzip der *gleichzeitigen* Extremaleigenschaft von Autoparallel*hyperflächen* und Autoparallel*kurven* in [9] und [10] behandelt wurde.

gestattet. Bei dieser Spezialisierung sind dann die Minimalhyperflächen und die Hyperflächen des isoperimetrischen Problems durch das Verschwinden bzw. die Konstanz der mittleren Krümmung gekennzeichnet[2]).

1. Definition des FINSLERschen Raumes.

Ein FINSLERscher *Raum* $\mathfrak{F}_n$ sei erklärt als n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit, in der für ein glattes p-dimensionales Flächenstück $x(u) \equiv x(u^1, \ldots, u^p)$ der *p-Inhalt* durch

$$J^{(p)} = \int F^{(p)}\left(x(u), \frac{\partial x}{\partial u^\varrho}(u)\right) du^1 \ldots du^p \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

gemessen wird. Dabei sollen die n Skalarfelder $F^{(p)}(x, X_\varrho)$ zunächst folgende Eigenschaften besitzen:

I. $F^{(p)}(x, X_\varrho) \geqq 0$, wobei Gleichheit nur für linear abhängige Vektoren X_ϱ besteht.

II. $F^{(p)}(x, U_\varrho^\varrho X_\varrho) = |\|U_\varrho^\varrho\|| F^{(p)}(x, X_\varrho)$.

III. $F^{(p)}$ ist dreimal stetig differenzierbar.

Hieraus folgt: Die Inhaltsfunktionen behalten ihren Wert bei Vertauschung zweier ihrer Vektoren sowie bei Addition des Vielfachen eines ihrer Vektoren zu einem anderen, außerdem sind sie in jedem Vektor positiv homogen erster Ordnung, und es gilt

$$\frac{\partial F^{(p)}}{\partial X_\varrho^i} X_\sigma^i = F^{(p)} \delta_\sigma^\varrho.$$

Speziell für die Volumenfunktion erhalten wir

$$F^{(n)}(x, X_\nu) = \mathfrak{F}(x) \, |\|X_1 \ldots X_n\||,$$

wobei sich $\mathfrak{F}(x)$ bei Koordinatentransformationen wie eine Skalardichte vom Gewicht $(+1)$ verhält.

Von der Längen- und Oberflächenfunktion soll eine weitere Eigenschaft vorausgesetzt werden. Faßt man

$$F^{(n-1)}(x, X_\varrho) = f(x, \mathfrak{p})$$

als Funktion der kovarianten Vektordichte $\mathfrak{p}_i = \|\delta_i^k X_1^k \ldots X_{n-1}^k\|$ vom Gewicht (-1) auf und führt man die Fundamentalgrößen

$$g_{ik}(x, X) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(1)}(x, X)^2}{\partial X^i \partial X^k}; \qquad \mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, \mathfrak{p})^2}{\partial \mathfrak{p}_i \partial \mathfrak{p}_k}$$

ein, so verlangen wir noch

IV. $g_{ik}(x, X)\, \xi^i \xi^k > 0$ für $\xi^i \neq 0$; $\mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p})\, \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_k > 0$ für $\mathfrak{P}_i \neq 0$.

Der MINKOWSKIsche *Sinus* zwischen zwei Vektorräumen in demselben Raumpunkt x des $\mathfrak{F}_n$ ist definiert durch

$$Sm(x; A_\alpha, B_\beta) = \frac{F^{(d)}(x; A_1, \ldots, A_d)\, F^{(s)}(x; A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b)}{F^{(a)}(x; A_1, \ldots, A_a)\, F^{(b)}(x; B_1, \ldots, B_b)},$$

[2]) Eine Skizze der vorliegenden Betrachtungen gaben wir in [13] und [14].

wenn der d-dimensionale Durchschnitt der beiden Vektorräume von $A_1 = B_1, \ldots, A_d = B_d$ und ihre s-dimensionale Summe von $A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b$ aufgespannt wird sowie die Dimensionszahlen der Bedingung $\mathrm{Min}(a, b) = d + 1$ genügen. Für $s = n$ können wir dem Sinus in üblicher Weise ein Vorzeichen zuordnen.

2. Differentiation längs eines Feldes von Hyperflächenelementen.

Zu der Tensordichte $\mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p})$ vom Gewicht $(+2)$ können wir, weil ihre Determinante nach IV positiv ist, durch $\mathfrak{G}^{ik}\mathfrak{G}_{jk} = \delta^i_j$ die kovariante Tensordichte $\mathfrak{G}_{jk}(x, \mathfrak{p})$ vom Gewicht (-2) einführen. Diese Fundamentaltensordichten erlauben es, durch Herauf- und Herunterziehen der Indizes den Raum der kovarianten Vektordichten vom Gewicht (-1) mit dem der kontravarianten Vektordichten vom Gewicht $(+1)$ in jedem einzelnen Raumpunkt zu identifizieren. Ein Hyperflächenelement des $\mathfrak{F}_n$ kann also jeweils durch eine dieser beiden Größen charakterisiert werden. Eine entsprechende Identifizierung gilt natürlich auch für die Tensorräume in jedem Hyperflächenelement $(x, \mathfrak{p})$.

Nunmehr soll zwischen den Räumen der Vektordichten in benachbarten Raumpunkten ein Zusammenhang und damit für ein Feld von Vektordichten eine *invariante Differentiation* definiert werden, die bezüglich der Oberflächenfunktion $f(x, \mathfrak{p})$ metrisch ist. Hierfür ist der Ansatz

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{p}_i = d\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k \Gamma^k_{i\,h}(x, \mathfrak{p})\, dx^h \tag{2.1}$$

notwendig, wobei die Koeffizienten $\Gamma^k_{i\,h}(x, \mathfrak{p})$ in $\mathfrak{p}$ homogen nullter Ordnung sind. Da diese Koeffizienten aber von der zu differenzierenden Vektordichte $\mathfrak{p}$ abhängen, kann jenes Differential nicht der Differentiationsregel für Produkte von Vektordichten genügen. Erweitert man hingegen diese Differentiation auf Tensorfelder (definiert längs eines Feldes von Hyperflächenelementen), so läßt sich in üblicher Weise ein Differentialkalkül entwickeln, der allgemeine Produkte von Tensoren nach der Produktregel zu differenzieren gestattet. Das Differential aller Tensoren ist dann festgelegt durch das einer kovarianten Tensordichte $\mathfrak{T}_i(x, \mathfrak{p})$ vom Gewicht (-1), das wir ansetzen in der Form

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{T}_i(x, \mathfrak{p}) = d\mathfrak{T}_i - \mathfrak{T}_k\left(\Gamma^k_{i\,h}\, dx^h + \frac{1}{f}\,\mathfrak{A}_i^{k\,h}\, d\mathfrak{p}_h\right). \tag{2.2}$$

Hierbei muß $\mathfrak{A}_i^{k\,h}(x, \mathfrak{p})$ eine in $\mathfrak{p}$ von nullter Ordnung homogene *Tensordichte* sein, für die $\mathfrak{A}_i^{k\,h}(x, \mathfrak{p})\,\mathfrak{p}_h = 0$ ist. Da dieser Ansatz speziell für Vektordichten in (2.1) übergehen soll, ist noch $\mathfrak{p}_k \mathfrak{A}_i^{k\,h}(x, \mathfrak{p}) = 0$ zu verlangen.

Um die Koeffizienten des invarianten Differentials festzulegen, fordern wir zunächst, daß die oben erwähnte Identifizierung der Tensorräume bei Differentiation invariant bleibt:

Postulat I: $$\mathfrak{D}\,\mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p}) = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial \mathfrak{G}^{ik}}{\partial x^h} = -2\Gamma^{(ik)}_{\quad h}, \qquad f\frac{\partial \mathfrak{G}^{ik}}{\partial \mathfrak{p}_h} = -2\mathfrak{A}^{(ik)\,h}. \tag{2.3}$$

Überschiebt man diese Gleichungen mit $\mathfrak{G}_{ik}$, so folgt noch

$$(2.4)\quad \Gamma^k_{k\,h} = -(n-1)\,\partial_h \log \sqrt{\mathfrak{G}}, \qquad \mathfrak{A}^h = \mathfrak{A}_k^{\,kh} = -(n-1)\,f \frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}_h} \log \sqrt{\mathfrak{G}},$$

wobei $\mathfrak{G}(x,\mathfrak{p}) = \|\mathfrak{G}^{rs}\|^{\frac{1}{n-1}}$ eine Skalardichte vom Gewicht $(+2)$ darstellt. Während jedoch $\mathfrak{A}^h$ eine Tensordichte ist, besitzt $\Gamma^k_{k\,h}$ nicht die Tensoreigenschaft.

Bezeichnet man die Hyperflächenelemente eines Feldes als parallel, wenn ihr Differential verschwindet, so drückt unsere erste Forderung speziell auch die *Invarianz des Inhaltes eines Hyperflächenelementes gegenüber Parallelverschiebung* aus, wie man unmittelbar aus der Darstellung

$$f(x,\mathfrak{p})^2 = \mathfrak{G}^{ik}(x,\mathfrak{p})\,\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_k$$

für die Oberflächenfunktion erkennt.

Die notwendigen Eigenschaften der Koeffizienten $\mathfrak{A}^{ikh}$ werden erfüllt, wenn man setzt:

Postulat II: $$\mathfrak{A}^{[ik]h} = 0.$$

Dann folgt nämlich aus (2.3 b) die endgültige Bestimmung dieser Tensordichte

$$(2.5)\quad \mathfrak{A}^{ikh} = -\frac{f}{2}\frac{\partial \mathfrak{G}^{ik}}{\partial \mathfrak{p}_h} = -\frac{f}{4}\frac{\partial^3 f^2}{\partial \mathfrak{p}_i\,\partial \mathfrak{p}_k\,\partial \mathfrak{p}_h}.$$

Um die verbleibende Unbestimmtheit der Koeffizienten $\Gamma^k_{i\,h}$ genauer charakterisieren zu können, ersetzen wir in (2.2) das gewöhnliche Differential $d\mathfrak{p}_h$ durch das Differential $\mathfrak{D}\mathfrak{N}_h$ der normierten Vektordichte $\mathfrak{N}_h = \frac{\mathfrak{p}_h}{f}$. Dies ergibt

$$(2.6)\quad \mathfrak{D}\mathfrak{T}_i(x,\mathfrak{p}) = d\mathfrak{T}_i - \mathfrak{T}_k(\Gamma^{*k}_{i\,h}\,dx^h + \mathfrak{A}_i^{kh}\,\mathfrak{D}\mathfrak{N}_h),$$

wenn man $\Gamma^{*k}_{i\,h} = \Gamma^k_{i\,h} + \mathfrak{A}_i^{kr}\Gamma^0_{r\,h}$ setzt und der Index Null eine Überschiebung mit $\mathfrak{N}_i$ bezeichnet. Die *Transformationsweise dieser gesternten Koeffizienten* beim Übergang zu neuen Koordinaten $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ mit $\Delta = \|x^{i'}_i\| \neq 0$ erkennt man leicht aus der Tatsache, daß $d\mathfrak{T}_i - \mathfrak{T}_k\Gamma^{*k}_{i\,h}\,dx^h$ eine Tensordichte vom Gewicht (-1) sein muß:

$$(2.7)\quad \Gamma^{*k'}_{i'\,h'} = x^i_{i'}\,x^{k'}_k\,x^h_{h'}\Gamma^{*k}_{i\,h} - x^i_{i'}\,x^h_{h'}\,x^{k'}_{ih} + \delta^{k'}_{i'}\,x^h_{h'}\,\partial_h \log|\Delta|.$$

Daraus folgt speziell

$$(2.8)\quad \Gamma^{*k'}_{k'\,h'} = x^h_{h'}\left(\Gamma^{*k}_{k\,h} + (n-1)\,\partial_h \log|\Delta|\right),$$

so daß die Größe

$$(2.9)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Sigma^k_{i\,h} = \Gamma^{*k}_{[i\,h]} - \frac{1}{n-1}\delta^k_{[i}\Gamma^{*r}_{|r|\,h]} \\ \qquad = \Gamma^{*k}_{[i\,h]} + \delta^k_{[i}\left(\partial_{h]}\log\sqrt{\mathfrak{G}} - \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^{*0}_{|r|\,h]}\right) \end{cases}$$

einen *Tensor* darstellt, der schließlich die Eigenschaft $\Sigma_0{}^k{}_k = \Gamma^*{}_0{}^k{}_k$ besitzt. In diesem schiefsymmetrischen Tensor $\Sigma_i{}^k{}_h$ drückt sich jetzt die noch bestehende Freiheit in der Wahl der invarianten Differentiation aus.

3. Normalkrümmung eines Hyperflächenstreifens.

Zur Untersuchung der Hyperflächenkrümmung muß eine Klasse von Hyperflächen ausgezeichnet werden, die analog den Hyperebenen des MINKOWSKIschen Raumes als Norm für das Krümmungsmaß dienen. Wir wählen hierzu jene Hyperflächen, für welche die Tangentialelemente bei Parallelverschiebung längs der Hyperfläche ineinander übergehen. Diese sog. *geodätischen Hyperflächen* sind also durch $\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}_i(u) \equiv 0$ gekennzeichnet. Im allgemeinen braucht zwar durch ein festes Hyperflächenelement keine geodätische Hyperfläche zu existieren, aber man kann — und dies genügt für unsere Zwecke — durch jedes Hyperflächenelement wenigstens eine Hyperfläche legen, die dort noch in zweiter Ordnung geodätisch ist:

$$\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}_i(u + du) = 0 + (du). \tag{3.1}$$

Unter einem *Hyperflächenstreifen* soll eine einparametrige Schar von Hyperflächenelementen $(x^i(s), \mathfrak{N}_i(s))$ verstanden werden, bei der jedes Element die zugehörige Tangente der Streifenkurve enthält:

$$\mathfrak{N}_i x'^i = 0. \tag{3.2}$$

Ähnlich wie die Kurvenkrümmung auf dem Begriff der geodätischen Linien begründet ist, wollen wir mittels der geodätischen Hyperflächen die *Normalkrümmung eines Hyperflächenstreifens* definieren. Hierzu betrachten wir im Punkt $x(s)$ die geodätische Tangentialhyperfläche $\mathfrak{T}_s$ des Streifens und *in* ihr die geodätische Tangente $\mathfrak{t}_s$ an die Streifenkurve (geodätisch im Sinne der Metrik von $\mathfrak{T}_s$). Bezeichne ξ den Schnittpunkt von $\mathfrak{t}_s$ und $\mathfrak{T}_{s+\Delta s}$, so werde die Normalkrümmung des Hyperflächenstreifens erklärt durch

$$\lambda(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{Sm(\xi; \mathfrak{t}_s, \mathfrak{T}_{s+\Delta s})}{\Delta s}. \tag{3.3}$$

Zur Umformung dieser geometrischen Krümmungsdefinition formulieren wir zunächst die angegebene Konstruktion analytisch: $\mathfrak{T}_s$ werde durch die Gleichung $z^i(s; u^\varrho)$ gegeben und ihr zugehöriges normiertes Tangentialelement mit $\mathfrak{M}_i(s; u^\varrho)$ bezeichnet. Dann gilt

$$\mathfrak{M}_i(s; 0) = \mathfrak{N}_i(s) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{M}_i(s; 0) = 0.$$

Wird ferner $\mathfrak{t}_s$ durch $y^i(s; \sigma)$ dargestellt, wo σ Bogenlängenparameter der Kurve ist, so haben wir noch

$$y^i(s; \sigma) = z^i\left(s; u^\varrho(\sigma)\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial y^i}{\partial \sigma}(s; 0) = x'^i(s).$$

Der Schnittpunkt ξ von $\mathfrak{t}_s$ und $\mathfrak{T}_{s+\Delta s}$ ist jetzt bestimmt durch

$$\xi^i = y^i(s; \Delta\sigma) = z^i(s + \Delta s; \Delta u^\varrho).$$

Nunmehr können wir den Grenzwert (3.3) berechnen. Wegen

$$\frac{\partial y^i}{\partial \sigma}(s;\Delta\sigma) = x'^i(s) + \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\frac{\partial z^i}{\partial \sigma}(s;0)\frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \cdots$$

$$\mathfrak{M}_i(s+\Delta s;\Delta u^\varrho) = \mathfrak{N}_i(s) + \frac{d}{ds}\mathfrak{N}_i(s)\,\Delta s + \mathfrak{M}_{i\alpha}(s;0)\,\Delta u^\alpha + \cdots$$

erhält man für den MINKOWSKIschen Sinus

$$Sm(\xi;\mathfrak{t}_s,\mathfrak{T}_{s+\Delta s}) = \mathfrak{F}(\xi)\frac{\partial y^i}{\partial \sigma}(s;\Delta\sigma)\,\mathfrak{M}_i(s+\Delta s;\Delta u^\varrho)$$

$$= \mathfrak{F}(\xi)\Big(x'^i(s)\frac{d}{ds}\mathfrak{N}_i(s)\,\Delta s + x'^i\mathfrak{M}_{i\alpha}(s;0)\,\Delta u^\alpha + \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\frac{\partial z^i}{\partial \sigma}(s;0)\mathfrak{M}_i(s;0)\frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \cdots\Big)$$

$$= \mathfrak{F}(\xi)\,x'^i\Big(\frac{d}{ds}\mathfrak{N}_i\,\Delta s - \mathfrak{N}_k\Gamma^k_{i\,h}z^h_\alpha(s;0)\Big(-\Delta u^\alpha + \frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma}\Delta\sigma\Big) + \cdots\Big).$$

Jetzt verbinden wir ξ und $x(s+\Delta s)$ auf der Hyperfläche $z^i(s+\Delta s, u^\varrho)$ durch eine Kurve $\tilde{u}^\varrho(\tilde{\sigma})$, welche die Streifenkurve berührt. Ist auch $\tilde{\sigma}$ Bogenlängenparameter, so folgt $\Delta u^\varrho = -\frac{\partial \tilde{u}^\varrho}{\partial \tilde{\sigma}}\Delta\tilde{\sigma} + \cdots = -\frac{\partial u^\varrho}{\partial \sigma}\Delta\tilde{\sigma} + \cdots$, und wegen $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma+\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta s} = 1$ erhalten wir schließlich

$$\lambda(s) = \mathfrak{F}(x)\,x'^i\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{N}_i}{ds}. \tag{3.4}$$

Ein Hyperflächenstreifen mit verschwindender Normalkrümmung heißt *asymptotischer Streifen*[3]. Fassen wir nun $\bar{\lambda} = \mathfrak{F}(x)\,x'^i\mathfrak{N}'_i$ als Normalkrümmung des gegebenen Streifens im MINKOWSKIschen Tangentialraum des Punktes x auf und $\bar{\lambda}_a = \mathfrak{F}(x)\,x'^i\mathfrak{N}_k\Gamma^k_{i\,h}x'^h$ als Normalkrümmung eines asymptotischen Streifens durch dasselbe Streifenelement, ebenfalls in der lokalen Geometrie gemessen, dann besagt die gewonnene Darstellung

$$\lambda = \bar{\lambda} - \bar{\lambda}_a. \tag{3.5}$$

4. Hauptkrümmungen einer Hyperfläche.

Als *begleitendes n-Bein* einer Hyperfläche $x(u^\varrho)$ wählen wir die Größen

$$x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \qquad \mathfrak{N}^i = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_i} \quad \text{oder} \quad X^\alpha_i = \frac{1}{F^{(n-1)}}\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\alpha}, \qquad \mathfrak{N}_i = \frac{\mathfrak{p}_i}{f}, \tag{4.1}$$

zwischen denen die Relationen

$$x^i_\alpha\mathfrak{N}_i = 0, \quad \mathfrak{N}^i\mathfrak{N}_i = 1, \quad x^i_\alpha X^\beta_i = \delta^\beta_\alpha, \quad \mathfrak{N}^i X^\beta_i = 0$$

bestehen. Mittels des Hyperflächentensors

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta}(u) = \mathfrak{G}^{ik}(x,\mathfrak{p})\,X^\alpha_i X^\beta_k$$

[3]) Es sei bemerkt, daß im Gegensatz zur RIEMANNschen und MINKOWSKIschen Differentialgeometrie im $\mathfrak{F}_3$ asymptotische Streifen und Schmiegstreifen nicht mehr identisch sind [vgl. auch W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 4. Aufl. (1945) S. 72].

erhält man für die Fundamentaltensordichte die Zerlegung

$$\mathfrak{G}^{ik} = \mathfrak{G}^{\varrho\sigma}\, x^i_\varrho\, x^k_\sigma + \mathfrak{N}^i\, \mathfrak{N}^k. \tag{4.2}$$

Durch Überschieben mit $\mathfrak{G}_{jk} X^r_i$ folgt daraus $X^r_j = \mathfrak{G}_{jk}\mathfrak{G}^{r\sigma}\, x^k_\sigma$, und dies wiederum ergibt für den inversen Hyperflächentensor $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(u) = \mathfrak{G}_{ik}(x, \mathfrak{p})\, x^i_\alpha\, x^k_\beta$.

Die WEINGARTENschen *Ableitungsgleichungen* der Hyperfläche besitzen jetzt die Form

$$\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i = -\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha(u)\, x^i_\beta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}_i = -\mathfrak{B}_{\beta\alpha}(u)\, X^\beta_i, \tag{4.3}$$

wobei allerdings der Hyperflächentensor $\mathfrak{B}_{\beta\alpha} = \mathfrak{G}_{\beta\varrho}\,\mathfrak{B}^\varrho{}_\alpha$ nicht mehr symmetrisch ist:

$$\mathfrak{B}_{(\beta\alpha)} = \mathfrak{N}_i(x^i_{\beta\alpha} + \Gamma^*_{(\beta}{}^i{}_{\alpha)}), \qquad \mathfrak{B}_{[\beta\alpha]} = \tfrac{1}{2}\Sigma^0_{\beta\alpha}. \tag{4.4}$$

Um zu geometrischen Betrachtungen überzugehen, definieren wir die *Hauptkrümmungsrichtungen* $\dot{u}^\varrho$ sowie die *Hauptkrümmungen* $1/R$ der Hyperfläche durch das Eigenwertproblem

$$(\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i)\,\dot{u}^\alpha = -\frac{\mathfrak{F}(x)}{R}\, x^i_\alpha\, \dot{u}^\alpha.$$

Die Hauptkrümmungen genügen dann der Gleichung

$$\left\| \mathfrak{B}_{\beta\alpha} - \frac{1}{R}\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\beta\alpha} \right\| = 0,$$

welche wegen der positiven Definitheit des induzierten Hyperflächentensors $\mathfrak{G}_{\beta\alpha}$ speziell für *symmetrisches* $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ nur reelle Wurzeln besitzt. In diesem Fall, auf den wir später noch näher zu sprechen kommen, gehen die WEINGARTENschen Ableitungsgleichungen bei Einführung von Krümmungslinienparametern in die *Formeln von* RODRIGUES über

$$\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i = -\frac{\mathfrak{F}}{R^{(\alpha)}}\, x^i_\alpha. \tag{4.5}$$

Bevor wir zur Diskussion der Hyperflächenkrümmung kommen, soll noch der Begriff des *sphärischen Bildes einer Hyperfläche* in einem ihrer Punkte erläutert werden. Hierbei handelt es sich um eine Abbildung der Umgebung eines Punktes der Hyperfläche auf die Einheitssphäre[4]) im MINKOWSKIschen Tangentialraum dieses Punktes. Sie wird erzeugt durch Parallelverschiebung des Hyperflächenelementes $\mathfrak{N}^i$ nach dem benachbarten Punkt, wobei natürlich die Normierung von $\mathfrak{N}^i$ erhalten bleibt. Das lokale sphärische Bild der Hyperfläche besitzt dann die Gestalt

$$n^i(u, du) = \frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\mathfrak{N}^i(u) + \mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i(u)\, du^\alpha + (du)^2\right), \tag{4.6}$$

so daß seine Tangentenrichtungen durch

$$\frac{\partial n^i}{\partial\, du^\alpha} \equiv n^i_\alpha = \frac{1}{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i + (du)$$

[4]) Vgl. hierzu [11] S. 368 und S. 372.

und seine zweite Grundform durch den symmetrischen Tensor

$$b_{\alpha\beta}\langle n\rangle \equiv n^i_{\alpha\beta} N_i = -\mathcal{D}_\alpha \mathfrak{N}^i \mathcal{D}_\beta \mathfrak{N}_i + (du)$$

dargestellt werden.

Die *Normalkrümmung eines Streifens auf einer Hyperfläche* läßt sich leicht durch die Größen der Hyperfläche ausdrücken. Aus (3.4) erhält man nämlich

$$\lambda(u, \dot{u}) = -\frac{\mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{B}_{\alpha\beta}(u)\, \dot{u}^\beta \dot{u}^\alpha}{F^{(1)}(u, \dot{u})^2}, \tag{4.7}$$

wobei $F^{(1)}(u, \dot{u}) \equiv F^{(1)}\left(x(u), x_\varkappa(u)\, \dot{u}^\varkappa\right)$ die induzierte Längenfunktion der Hyperfläche bezeichnet. Diese Gleichung stellt ein Analogon zu dem Ausdruck [*12*] (3.3) für die Normalkrümmung einer Hyperflächenkurve dar[5]). Während aber dort der Zähler $b(u, \dot{u})$ nur homogen zweiter Ordnung in $\dot{u}^\varrho$ ist, erhalten wir jetzt im Zähler eine quadratische Form in diesen Variablen.

Um eine *geometrische Deutung der Hauptkrümmungen* einer Hyperfläche herleiten zu können, spezialisieren wir uns auf den Fall eines *symmetrischen* Hyperflächentensors $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ und führen Krümmungslinienparameter ein. Dann folgt aus den Formeln von RODRIGUES einerseits

$$F^{(1)}(x^i; n^i_\alpha)^2 = \frac{1}{(R^{(\alpha)})^2} F^{(1)}(x^i; x^i_\alpha)^2$$

sowie durch Überschieben mit $\mathcal{D}_\alpha \mathfrak{N}_i$

$$b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle = -\frac{\mathfrak{F}}{R^{(\alpha)}} \mathfrak{B}_{\alpha\alpha}\langle x\rangle.$$

Außerdem besitzen die Streifenkrümmungen auf der Hyperfläche und ihrem sphärischen Bild in Richtung der α-ten Krümmungslinie nach (4.7) die Werte

$$\lambda^{(\alpha)}\langle x\rangle = -\frac{\mathfrak{F}\, \mathfrak{B}_{\alpha\alpha}\langle x\rangle}{F^{(1)}(x^i; x^i_\alpha)^2} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^{(\alpha)}\langle n\rangle = -\frac{b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle}{F^{(1)}(x^i; n^i_\alpha)^2}.$$

Daraus erhält man für die Hauptkrümmungen der Hyperfläche die Beziehung

$$\frac{1}{R^{(\alpha)}} = -\frac{\lambda^{(\alpha)}\langle x\rangle}{\lambda^{(\alpha)}\langle n\rangle}. \tag{4.8}$$

Wie wir in [*12*] Nr. 3 und 4 darlegten, läßt sich im FINSLERschen Raum die Hyperflächenkrümmung nicht mehr durch die Gleichung [*11*] (5.17) auf die Krümmung gewisser Hyperflächenkurven zurückführen. Aber der Begriff der Streifenkrümmung erlaubt, eine analoge relativgeometrische Relation herzuleiten und damit den Hauptkrümmungen der Hyperfläche eine geometrische Interpretation zu geben.

5. Minimalhyperflächen und isoperimetrisches Problem.

Zur Untersuchung der auf der Oberflächenmessung begründeten Variationsprobleme erscheint es zweckmäßig, zunächst die erste Variation

$$\delta F^{(n-1)} = \left(\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\varrho}\right)\delta x^i + \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\left(\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\varrho}\delta x^i\right) \tag{5.1}$$

[5]) Im Spezialfall des RIEMANNschen und MINKOWSKIschen Raumes besteht natürlich die Gleichung $-\lambda = \varkappa\, Sm\ (x; \mathfrak{S}, \mathfrak{T})$.

der Oberflächenfunktion durch Größen des Raumes und der Hyperfläche auszudrücken. Für das erste Glied ergibt sich dabei

$$\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\varrho} = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho}(f X^\varrho_i)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^k} x^k_\varrho X^\varrho_i\right) - \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_k}\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x^s_\sigma} x^s_{\sigma\varrho} X^\varrho_i - f\frac{\partial X^\varrho_i}{\partial u^\varrho}.$$

Berücksichtigt man (4.2) und die Identität $\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x^s_\sigma} = \mathfrak{p}_k X^\sigma_s - \mathfrak{p}_s X^\sigma_k$ [6]), so folgt

$$= \frac{\partial f}{\partial x^k}\mathfrak{N}^k \mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}^k \mathfrak{p}_k X^\sigma_s x^s_{\sigma\varrho} X^\varrho_i - f\frac{\partial X^\varrho_i}{\partial u^\varrho}.$$

Wegen $f = \sqrt{\mathfrak{G}^{rs}\mathfrak{p}_r \mathfrak{p}_s}$ gilt nun

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{1}{2f}\frac{\partial \mathfrak{G}^{rs}}{\partial x^k}\mathfrak{p}_r \mathfrak{p}_s = -f\Gamma^0_{0k},$$

und weiterhin besteht die Zerlegung

$$-\frac{\partial X^\varrho_i}{\partial u^\tau} = (x^s_{\mu\tau} X^\varrho_s) X^\mu_i + \left(\frac{\partial \mathfrak{N}^s}{\partial u^\tau} X^\varrho_s\right)\mathfrak{N}_i = x^s_{\mu\tau} X^\varrho_s X^\mu_i - (\mathfrak{B}^\varrho_\tau + \Gamma^\varrho_{0\tau})\mathfrak{N}_i,$$

so daß wir schließlich haben

$$\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\varrho} = -f(\Gamma^0_{0\,0} + \Gamma^\varrho_{0\,\varrho} + \mathfrak{B}^\varrho_\varrho)\mathfrak{N}_i$$
$$= -f(\mathfrak{B}^\varrho_\varrho + \Gamma^k_{0\,k})\mathfrak{N}_i = -f(\mathfrak{B}^\varrho_\varrho + \Sigma^k_{0\,k})\mathfrak{N}_i.$$

Führt man noch die übliche Umformung des zweiten Gliedes in (5.1) durch [7]), dann erhalten wir für die *erste Variation der Oberfläche* allgemein

$$(5.2)\qquad \begin{cases} \delta J^{(n-1)} = -\int (\mathfrak{B}^\varrho_\varrho + \Sigma^k_{0\,k})(\mathfrak{N}_i\,\delta x^i)\,dJ^{(n-1)} + \\ \qquad + \oint \left\| \mathfrak{N}^k\,\delta x^k \frac{\partial x^k}{\partial w^1} \cdots \frac{\partial x^k}{\partial w^{n-2}} \right\| dw^1 \ldots dw^{n-2}. \end{cases}$$

Jetzt läßt sich sofort die Bedingung für die *Minimalhyperflächen* angeben, d. h. für die Extremalen der Oberfläche bei festem $(n-2)$-dimensionalen Rand:

$$(5.3)\qquad \mathfrak{B}^\varrho_\varrho + \Sigma^k_{0\,k} = 0.$$

Wie man aus (5.2) erkennt, sind die Minimalhyperflächen aber auch Extremalen bezüglich der Schar von Parallelhyperflächen, welche durch Abtragen einer konstanten Distanz auf der Hyperflächentransversalen

$$\delta x^i = \text{const}\,\frac{\mathfrak{N}^i}{\mathfrak{H}}$$

definiert sind [8]).

[6]) Vgl. etwa [9] (8.7).

[7]) Vgl. die entsprechende Rechnung in [9] S. 28 und 29.

[8]) Diese Eigenschaft der Minimalhyperflächen ist das Analogon zu einem Satz von J. STEINER (Ges. Werke II, S. 176). — Zum Distanzbegriff vgl. [11] S. 367.

Wir kommen nun zur Behandlung des *isoperimetrischen Problems*[9]), d.h. wir suchen eine notwendige Bedingung für jene geschlossenen Hyperflächen, die verglichen mit den Nachbarhyperflächen von gleicher Oberfläche ein größtes Volumen einschließen. Eine Hyperfläche $x(u^0)$, welche diese Extremaleigenschaft besitzt, kann man etwa durch Einführung von Polarkoordinaten in eine Hyperflächenschar $x = x(r; u^1, \ldots, u^{n-1})$ einbetten, so daß die Funktionaldeterminante positiv ist und die ursprüngliche Hyperfläche durch $r = 1$ dargestellt wird. Dann haben wir für das Volumen $J^{(n)}(r)$ die Differenz

$$J^{(n)}(1+h) - J^{(n)}(1) = \oint \int_1^{1+h} \mathfrak{F}(x) \left\| \frac{\partial x^i}{\partial r}\, x_1^i \ldots x_{n-1}^i \right\| dr\, du^1 \ldots du^{n-1}$$

und damit die Variation

$$\delta J^{(n)} = \frac{\partial J^{(n)}}{\partial r}_1 \delta r = \oint \mathfrak{F}(x) \frac{\partial x^i}{\partial r}_1 \delta r\, \mathfrak{p}_i\, du^1 \ldots du^{n-1}$$

$$\delta J^{(n)} = \oint \mathfrak{F}(x)\, (\mathfrak{N}_i\, \delta x^i)\, dJ^{(n-1)}. \tag{5.4}$$

Weil nun für unsere geschlossene Hyperfläche aus $\delta J^{(n-1)} = 0$ auch $\delta J^{(n)} = 0$ folgen soll, muß schließlich

$$\mathfrak{B}^0_\varrho + \Sigma_0^k{}_k = \mathfrak{F}(x) \cdot \text{const} \tag{5.5}$$

sein.

6. Variation der Duallänge von Kurven.

Für eine Kurve $x(t)$ können wir jedem Tangentenvektor $\dot{x}(t)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(x)\, \dot{x}^i = \mathfrak{p}^i \tag{6.1}$$

ein Hyperflächenelement $\mathfrak{p}_i(x, \dot{x})$ zuordnen, zu dem die Kurventangente transversal ist. Dies ist eindeutig möglich, weil die Funktionaldeterminante

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}_j}\, \mathfrak{p}^i \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}_j}\, \mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_k \right\| = \|\mathfrak{G}^{ij}\| \neq 0$$

ist. Der Kurvenpunkt $x + dx$ besitzt nun von dem Hyperflächenelement $\mathfrak{p}(x, \dot{x})$ nach [*11*] (3.10) die Distanz

$$d^*s \equiv \frac{\mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{p}_i}{f(x, \mathfrak{p})}\, dx^i = \frac{\mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{p}_i}{f(x, \mathfrak{p})}\, \dot{x}^i\, dt = f(x, \mathfrak{p})\, dt. \tag{6.2}$$

Die hierdurch längs einer Kurve definierte Größe $^*s$ wollen wir ihre *Duallänge* nennen.

Unsere anfangs festgelegte Abbildung zwischen den Vektoren $\dot{x}$ und den Vektordichten $\mathfrak{p}$ erlaubt es, die von $(x, \mathfrak{p})$ abhängigen Größen auch als Funktionen von $(x, \dot{x})$ zu betrachten. Zur Unterscheidung soll in diesem zweiten Fall eine Differentiation nach x^i mit $\frac{\delta}{\delta x^i}$ bezeichnet werden.

[9]) Für zweidimensionale Finsler-Räume vgl. Busemann [*8*] S. 288.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der *ersten Variation der Duallänge* einer Kurve über:

$$\delta f = \left(\frac{\delta f}{\delta x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\right)\delta x^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i\right). \tag{6.3}$$

Benutzt man die Darstellung $f = \sqrt{\mathfrak{F}^2 \mathfrak{G}_{rs}(x, \mathfrak{p})\dot{x}^r \dot{x}^s}$, so folgt zunächst

$$\frac{\delta f}{\delta x^i} = \frac{1}{2f}\left(2\mathfrak{F}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x^i}\mathfrak{G}_{rs}\dot{x}^r\dot{x}^s + \mathfrak{F}^2\frac{\partial \mathfrak{G}_{rs}}{\partial x^i}\dot{x}^r\dot{x}^s + \mathfrak{F}^2\frac{\partial \mathfrak{G}_{rs}}{\partial \mathfrak{p}_j}\frac{\delta \mathfrak{p}_j}{\delta x}\dot{x}^r\dot{x}^s\right) = f(\partial_i \log \mathfrak{F} + \Gamma^0_{0i}).$$

Wegen $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_i$ erhalten wir weiterhin

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} = f\mathfrak{N}_i\,\partial_0 \log \mathfrak{F} + \mathfrak{F}\frac{d}{dt}\mathfrak{N}_i.$$

Beachtet man noch die aus (2.9) folgende Identität

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} + \Sigma_0{}^0{}_i - 2\left(\partial_{[i}\log\sqrt{\mathfrak{G}} - \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_{k]},$$

dann ergibt sich schließlich für die Variation der Duallänge

$$\left\{\begin{aligned}\delta^* s = -\int_{t_1}^{t_2}\Big\{&\mathfrak{F}\frac{\mathcal{D}}{dt}\mathfrak{N}_i + f\Sigma_i{}^0{}_0 - 2f\left(\partial_{[i}\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_{k]}\Big\}\delta x^i\,dt + \\ &+ \mathfrak{F}\mathfrak{N}_i\,\delta x^i\Big|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}\right. \tag{6.4}$$

Aus dieser Darstellung gewinnt man unmittelbar die Bedingung für die *Extremalkurven der Duallänge* zwischen zwei festen Punkten:

$$\mathfrak{F}\frac{\mathcal{D}}{dt}\mathfrak{N}_i = f\left\{\Sigma_0{}^0{}_i + 2\left(\partial_{[i}\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_{k]}\right\}. \tag{6.5}$$

Jene Kurven, bei denen die zugeordneten normalen Hyperflächenelemente $\mathfrak{p}(x, \dot{x})$ bei Parallelverschiebung längs der Kurve ineinander übergehen, nennen wir *dual-geodätische Linien*. Sie sind also durch $\frac{\mathcal{D}}{dt}\mathfrak{N}_i = 0$ gekennzeichnet.

7. Extremaleigenschaft der geodätischen Hyperflächen und dual-geodätischen Linien.

Außer bei der Einführung der Krümmungslinienparameter in Nr. 3 blieb in den bisherigen Untersuchungen der schiefsymmetrische Tensor $\Sigma_i{}^k{}_h(x, \mathfrak{p})$ völlig unbestimmt und damit die invariante Differentiation in gewisser Weise willkürlich. Wir fragen uns jetzt zunächst, ob diese Differentiation so gewählt werden kann, daß die *geodätischen Hyperflächen* zu den Minimalhyperflächen gehören und gleichzeitig die *dual-geodätischen Linien* mit den Extremalkurven der Duallänge identisch sind. Diese Eigenschaften drücken sich nach (5.3) und (6.5) in den Bedingungen aus:

$$\left\{\begin{aligned}&\Sigma_0{}^k{}_k = 0\\ &\Sigma_i{}^0{}_0 = 2\left(\partial_{[i}\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_{k]}.\end{aligned}\right. \tag{7.1}$$

Man erkennt unmittelbar, daß das

Postulat III: $$\Sigma_i^{\ k}{}_h = 2\left(\partial_{[i}\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\,\mathfrak{A}^r\,\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\,\mathfrak{N}_{h]}$$

diesen Gleichungen genügt. Die Tensoreigenschaft dieses speziellen Ansatzes ist erfüllt, weil sich bereits die Größe

$$\partial_i\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\,\mathfrak{A}^r\,\Gamma^0_{r\,i} = \partial_i\log\mathfrak{F} + \frac{1}{n-1}\,\Gamma^{*\,r}_{r\,i}$$

nach (2.8) wie ein Tensor verhält.

Nunmehr haben wir die n^3 Gleichungen aus (2.3a) und aus dem letzten Postulat nach den Koeffizienten Γ_{ikh} aufzulösen. Dieses System läßt sich in der Form

(7.2) $$\Gamma_{[i|k|h]} = -\,\Phi_{[i|k|h]} - \Psi_{[i|k}{}^r\,\Gamma_{r0|h]}, \qquad \Gamma_{(ik)h} = \tfrac{1}{2}\,\partial_h\,\mathfrak{G}_{ik}$$

schreiben, wenn man die Abkürzungen

(7.3) $$\begin{cases} \Phi_{ikh} = (\mathfrak{G}_{ik} - \mathfrak{N}_i\,\mathfrak{N}_k)\,\partial_h\log\sqrt{\mathfrak{G}} + \mathfrak{N}_i\,\mathfrak{N}_k\,\partial_h\log\mathfrak{F} \\ \Psi_{ik}{}^r = -\,(\mathfrak{G}_{ik} - \mathfrak{N}_i\,\mathfrak{N}_k)\,\dfrac{1}{n-1}\,\mathfrak{A}^r + \mathfrak{A}_{ik}{}^r \end{cases}$$

benutzt, die nur bekannte Größen enthalten. Wir machen den Ansatz

(7.4) $$\Gamma_{ikh} = \{_{ikh}\} + 2\,\Phi_{h[ki]} + S_{ikh},$$

wobei das CHRISTOFFEL-Symbol $\{_{ikh}\} = \frac{1}{2}\,(\partial_h\mathfrak{G}_{ik} + \partial_i\mathfrak{G}_{kh} - \partial_k\mathfrak{G}_{hi})$ natürlich den Gleichungen

$$\{_{[i\ k\ h]}\} = 0, \qquad \{_{(ik)h}\} = \tfrac{1}{2}\,\partial_h\,\mathfrak{G}_{ik}$$

genügt. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (7.2) gewinnt man das einfachere Gleichungssystem

(7.5) $$S_{[i|k|h]} = -\,\Psi_{[i|k}{}^r\,\Gamma_{r0|h]}, \qquad S_{(ik)h} = 0,$$

welches sich in üblicher Weise lösen läßt[10]), da für die symmetrische Größe $\Psi_{ik}{}^r$ die Beziehungen $\Psi_{i0}{}^r = 0$ und $\Psi_{ik}{}^0 = 0$ gelten. Man erhält also

$$S_{i0h} = S_{h0i} \quad \text{und} \quad 0 = S_{00h} = S_{h00} = S_{0h0}.$$

Weiterhin folgt

$$S_{ikh} + S_{khi} + S_{hik} = 0$$

und damit

(7.6) $$S_{hik} = 2\,\Psi_{[i|k}{}^r\,\Gamma_{r0|h]}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich schließlich

(7.7) $$S_{h0k} = -\,\Psi_{hk}{}^r\,(\{_{r00}\} + \partial_r\log\mathfrak{F}),$$

[10]) Vgl. etwa die sich an [12] (5.9) anschließenden Rechnungen.

womit unsere Aufgabe gelöst ist; denn nach (7.4), (7.6) und (7.7) sind die Koeffizienten Γ_{ikh} *eindeutig* bestimmt[11]).

Tatsächlich läßt sich aus der speziellen Forderung III für den Tensor Σ^{k}_{ih} die invariante Differentiation eindeutig festlegen, und für die zugehörige Parallelverschiebung haben sowohl die geodätischen Hyperflächen als auch die dual-geodätischen Linien die Extremaleigenschaft. Insbesondere ist dann der Hyperflächentensor $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ symmetrisch, so daß in jedem Hyperflächenpunkt genau $(n-1)$ linear unabhängige Hauptkrümmungsrichtungen existieren, in denen die Hyperfläche die Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{R^{(\alpha)}} = -\frac{\lambda^{(\alpha)}\langle x\rangle}{\lambda^{(\alpha)}\langle n\rangle}$$

besitzt. Die Minimalhyperflächen sind schließlich durch das Verschwinden der mittleren Krümmung

$$H \equiv \frac{1}{n-1}\Sigma\frac{1}{R^{(\alpha)}} = 0$$

gekennzeichnet, während für die Lösungshyperflächen des isoperimetrischen Problems

$$H = \text{const}$$

eine notwendige Bedingung darstellt.

Literatur.

[1] FINSLER, P.: Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Diss. Göttingen 1918. — [2] FINSLER, P.: Über die Krümmungen der Kurven und Flächen. IX. Convegno Volto, Acc. d'Italia 1940. — [3] CARTAN, E.: Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. Paris: Hermann 1933. — [4] CARTAN, E.: Les espaces de Finsler. Paris: Hermann 1934. — [5] ALARDIN, F.: L'autoparallélisme des courbes extrémales dans les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. J. Math. pur. appl. IX **27**, 255—336 (1948). — [6] BUSEMANN, H.: The foundations of Minkowskian geometry. Comm. Math. Helv. **24**, 156—187 (1950). — [7] BUSEMANN, H.: The geometry of Finsler spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **57**, 5—16 (1950). — [8] BUSEMANN, H.: On geodesic curvature in two-dimensional Finsler spaces. Ann. di Mat. IV **31**, 281—295 (1950). — [9] BARTHEL, W.: Über die Minimalflächen in gefaserten Finslerräumen. Ann. di Mat. IV **36**, 1—33 (1954). — [10] BARTHEL, W.: Über das Verhältnis der Vektorübertragung zu den Variationsproblemen in Cartanschen Räumen. Rend. Circ. Mat. di Palermo II **3**, 270—281 (1954). — [11] BARTHEL, W.: Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie. Math. Z. **58**, 358—375 (1953). — [12] BARTHEL, W.: Über eine Parallelverschiebung mit Längeninvarianz in lokal-Minkowskischen Räumen. Arch. Math. **4**, 346—365 (1953). — [13] BARTHEL, W.: Über Minkowskische und Finslersche Geometrie. Convegno di Geometria Differenziale 1953, Cremonese, Roma, 71—76, 1954. — [14] BARTHEL, W.: Zur Flächentheorie in Finslerschen Räumen. Proc. Internat. Congr. Math. II, 194—196, 1954.

[11]) Bei den in [3], [5] und [9] benutzten invarianten Differentiationen mußte zusätzlich das Nichtverschwinden einer gewissen Determinante gefordert werden. Dies entfällt hier vollkommen.

Saarbrücken, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 2. November 1954.)

Leichtweiss, K.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 37—49 (1955)

Zwei Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie.

Herrn Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

Kurt Leichtweiss.

Bekanntlich bewies H. W. E. Jung zum ersten Male, daß jeder konvexe Körper im n-dimensionalen, euklidischen Raum vom Durchmesser d sich stets in eine Kugel vom Radius $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\,d$, aber im allgemeinen in keine kleinere Kugel einbetten läßt [1], [2], [3]. F. Bohnenblust [4] fand als Analogon zu diesem Satz in der Minkowski-Geometrie, daß ebenso jeder konvexe Körper im n-dimensionalen Minkowskischen Raum vom Minkowski-Durchmesser d stets in ein homothetisches Bild seines als zentralsymmetrisch vorausgesetzten Eichkörpers eingebettet werden kann, welches um den Faktor $\frac{n}{n+1}\,d$ vergrößert ist. Auch hier ist $\frac{n}{n+1}\,d$ der bestmögliche Faktor. Bohnenblusts Beweisführung ist im wesentlichen algebraischer Natur; auf die Diskussion aller Fälle, wo der Faktor $\frac{n}{n+1}\,d$ nicht unterboten werden kann, geht er nicht ein. Dies soll nun im Rahmen eines rein geometrischen Beweises des Bohnenblustschen Satzes nachgeholt werden, wobei sich auch eine Charakterisierung der n-Simplizes in der Minkowski-Geometrie ergeben wird. Der Eichkörper braucht dabei nicht notwendig zentralsymmetrisch zu sein. Außerdem wird noch eine zur Bohnenblustschen gewissermaßen duale Abschätzung gegeben, welche den größtmöglichen Vergrößerungsfaktor eines in einem konvexen Körper liegenden homothetischen Bildes des (nicht notwendig zentralsymmetrischen) Eichkörpers mit der (geeignet definierten) Minkowskischen Dicke des konvexen Körpers in Verbindung bringt und als Analogon zu den Ungleichungen von P. Steinhagen [5], [6] gelten kann.

Sei M_n der n-dimensionale Minkowskische Raum mit dem konvexen Eichkörper $\mathfrak{E}$, gegeben durch die Ungleichung: $F(x_1, \ldots, x_n) = F(\mathfrak{x}) \leq 1\ (F > 0)$, wobei F positiv homogen vom ersten Grade in den Variablen x ist. Zu jedem Vektor $\mathfrak{x}$ des M_n gibt es einen gleichgerichtet parallelen Eichvektor $\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{x}}{F(\mathfrak{x})}$ vom Nullpunkt zum Rand von $\mathfrak{E}$; und verbindet $\mathfrak{x}$ etwa die Punkte P und Q von M_n, so wird die Minkowskische Länge $d(P, Q)$ von P nach Q wie folgt definiert: $d(P, Q) = d(\mathfrak{x}) = F(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{e}|}$ [1]). In M_n liege ein beschränkter, abgeschlossener, konvexer Körper $\mathfrak{K}$ vom Minkowski-Durchmesser d, welcher

[1]) Mit Absolutstrichen bezeichnen wir im folgenden die euklidischen Längen.

zweckmäßigerweise durch $d = \underset{P, Q \in \mathfrak{K}}{\text{Max}}\, d(P, Q)$ definiert ist. Wir behaupten jetzt als erstes:

Satz 1. *$\mathfrak{K}$ läßt sich in ein um $\frac{n}{n+1} d$ vergrößertes homothetisches Bild von $\mathfrak{E}$ einbetten; oder analytisch ausgedrückt: Es gibt einen Punkt Z von M_n mit $d(Z, P) \leq \frac{n}{n+1} d$ für alle P aus $\mathfrak{K}$* [2]).

Dem Beweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Lemma 1. *Seien ε_1 und ε_2 zwei parallele Stützebenen an einen n-dimensionalen, konvexen Körper $\mathfrak{K}$* [3]) *und ε_s die zu ihnen parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene durch den Schwerpunkt S von $\mathfrak{K}$. Sind dann a_1 und a_2 die Abstände von ε_1 und ε_2 von ε_s, so gilt: $\frac{a_1}{a_2} \leq n$. Ein Gleichheitszeichen kann hier nur erreicht werden, wenn $\mathfrak{K}$ Projektionskegel eines auf ε_2 liegenden, $(n-1)$-dimensionalen, konvexen Körpers $\mathfrak{L}$ von einem auf ε_1 liegenden Zentrum C ist.*

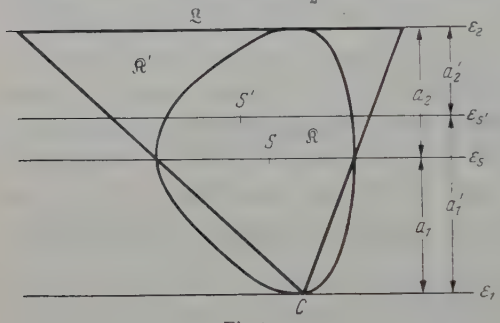

Fig. 1.

Um dies zu zeigen, schneiden wir $\mathfrak{K}$ mit ε_s und projizieren den dadurch erhaltenen Körper $\overline{\mathfrak{K}}$ von einem Randpunkt C von $\mathfrak{K}$ auf ε_1 aus auf ε_2. Durch den Schwerpunkt S' des so erhaltenen Projektionskegels $\mathfrak{K}'$ legen wir die zu ε_s parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene $\varepsilon_{s'}$, welche von ε_1 und ε_2 die Abstände a_1' und a_2' habe. Dann ist bekanntlich $\frac{a_1'}{a_2'} = n$, und wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ gilt: $a_1 \leq a_1'$, $a_2 \geq a_2'$. Es ist also $\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{a_1'}{a_2'} = n$. Offensichtlich gilt hierbei nur dann ein Gleichheitszeichen, wenn $\mathfrak{K}$ mit dem Projektionskörper $\mathfrak{K}'$ identisch ist, w. z. b. w.

Lemma 2. *Für die Abschnitte s_1 und s_2 einer durch den Schwerpunkt S eines n-dimensionalen, konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ gehenden und durch S geteilten Sehne gilt allgemein: $\frac{s_1}{s_2} \leq \text{Max}\, \frac{a_1}{a_2}$, wobei a_1 und a_2 die in Lemma 1 definierten Größen sind.*

Schneidet nämlich die durch S gehende Sehne den Rand von $\mathfrak{K}$ in A und B, so daß wir etwa $|SA| = s_1$, $|SB| = s_2$ annehmen können, so errichten wir durch B eine Stützebene ε_2 an $\mathfrak{K}$. ε_1 sei die dazu parallele andere Stützebene an $\mathfrak{K}$ und ε_s die durch S gehende, zu ε_1 parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene. Bezeichnen wir endlich mit A' den Schnittpunkt der (verlängerten)

[2]) Dieser Satz gilt auch, wenn $\mathfrak{K}$ nicht konvex ist, da sich beim Übergang von $\mathfrak{K}$ zu seiner konvexen Hülle d und Vergrößerungsfaktor nicht ändern.

[3]) Konvexe Körper seien in Zukunft stets abgeschlossen und beschränkt.

Sehne mit ε_1, so gilt nach Lemma 1 wegen $|SA| \leqq |SA'|$: $\frac{s_1}{s_2} = \frac{|SA|}{|SB|} \leqq \frac{|SA'|}{|SB|} = \frac{a_1}{a_2}$, d.h. a fortiori: $\frac{s_1}{s_2} \leqq \mathrm{Max}\,\frac{a_1}{a_2}$ [4]), w. z. b. w.

Beweis von Satz 1. Wir können annehmen, $\mathfrak{K}$ sei n-dimensional, denn für einen niedriger dimensionalen Körper gilt eine schärfere, also um so mehr dieselbe Ungleichung. Aus Lemma 1 und Lemma 2 folgt nun sofort für einen n-dimensionalen konvexen Körper $\mathfrak{K}$: $\frac{s_1}{s_2} \leqq n$ oder $\frac{1}{n} + 1 \leqq \frac{s_1 + s_2}{s_1}$; d.h. $s_1 \leqq \frac{n}{n+1}(s_1 + s_2)$ oder $|SA| \leqq \frac{n}{n+1}|BA|$. Sei nun P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{K}$. Eine durch S und P gehende Sehne schneide den Rand von $\mathfrak{K}$ in A und B derart, daß etwa P auf der Strecke SA liegt. Dann gilt: $d(S, P) = \frac{|SP|}{|e|} \leqq \frac{|SA|}{|e|} \leqq \frac{n}{n+1}\frac{|BA|}{|e|} = \frac{n}{n+1}d(B, A) \leqq \frac{n}{n+1}d$. Der Schwerpunkt S ist also ein „Zentrum" Z der in unserem Satz verlangten Art, welcher jetzt vollständig bewiesen ist, w. z. b. w.

Der Vergrößerungsfaktor $\frac{n}{n+1}d$ von Satz 1 kann nun nicht verkleinert werden, so daß wir also die Ungleichung des Satzes 1 als Analogon der Jung-schen Ungleichung in der Minkowski-Geometrie ansprechen können. Dies zeigt folgendes Beispiel: Es sei $\mathfrak{K}$ ein n-Simplex $\mathfrak{S}$; die (nach außen weisenden) Normalen auf seinen $(n-1)$-dimensionalen Seiten seien mit $\mathfrak{n}_i$ und die zu diesen Richtungen gehörenden Breiten von $\mathfrak{S}$ mit b_i bezeichnet; weiter seien E_i seine Ecken und σ_i die E_i gegenüberliegenden $(n-1)$-Seiten ($i = 0, 1, \ldots, n$; $b_i > 0$). Wir bilden den Vektor- oder Breitenkörper $\mathfrak{S}_B$ von $\mathfrak{S}$, welcher bekanntlich als geometrischer Ort der Endpunkte aller derjenigen am Nullpunkt angetragenen Vektoren definiert ist, welche jeweils die Differenz der Ortsvektoren zweier Punkte von $\mathfrak{S}$ sind. Nun folgt aus der Schwerpunktsdarstellung eines beliebigen Punkts von $\mathfrak{S}$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ mittels der E_i mit den Ortsvektoren $\mathfrak{x}_i$: $\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathfrak{x}_i \left(\lambda_i \geqq 0;\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right)$. Ebenso gilt für einen beliebigen anderen Punkt von $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{y} = \sum_{k=0}^{n} \mu_k \mathfrak{x}_k \left(\mu_k \geqq 0;\ \sum_{k=0}^{n} \mu_k = 1\right)$. Hieraus folgt also für den (beliebigen) Punkt von $\mathfrak{S}_B$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x} - \mathfrak{y}$: $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathfrak{x}_i - \sum_{k=0}^{n} \mu_k \mathfrak{x}_k = \sum_{i,k=0}^{n} \lambda_i \mu_k (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k)$, wobei $\lambda_i \mu_k \geqq 0$ und $\sum_{i,k=0}^{n} \lambda_i \mu_k = 1$ ist. Ganz $\mathfrak{S}_B$ liegt also in der konvexen Hülle seiner Punkte $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k$ und ist, da es selbst konvex ist, deshalb ein Polyeder mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit den $n(n+1)$ verschiedenen Ecken $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k$ ($i \neq k$). Es wird nämlich von den zur Richtung von $-\mathfrak{n}_i$ orientiert orthogonalen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen im Abstand b_i vom Nullpunkt gestützt, deren $\mathfrak{S}_B$ enthaltende Halbräume ein n-Simplex $\mathfrak{T}$ zum Durchschnitt haben. Nehmen wir an, der Schwerpunkt von $\mathfrak{S}$ falle mit dem Nullpunkt zusammen, was von nun an immer vorausgesetzt sei, so ist $\mathfrak{T}$ das $-(n+1)$-fach vergrößerte Bild von $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}_B$ ist in $\mathfrak{T}$ enthalten, und der Rand von $\mathfrak{S}_B$ hat mit dem Rand von $\mathfrak{T}$ genau die $n+1$

[4]) Den Beweis dieses Lemmas hat mir Herr Süss mitgeteilt.

verschiedenen $(n-1)$-Simplizes τ_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ gemein, welche durch die Endpunkte der am Nullpunkt angetragenen Vektoren $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}$ ($\mathfrak{x}$ sei der Ortsvektor eines beliebigen Punktes von σ_i) beschrieben werden. $\mathfrak{F}$ sei ein $\mathfrak{S}_B$ enthaltender und in $\mathfrak{T}$ enthaltener, sonst aber beliebiger, konvexer Körper. Dann enthält auch der Rand von $\mathfrak{F}$ die $(n-1)$-Simplizes τ_i. Wir legen jetzt den konvexen Körper $\mathfrak{E} = \frac{1}{l}\mathfrak{F}$ $(l>0)$, d.h. den um den positiven Faktor l^{-1} gestreckten Körper $\mathfrak{F}$ [5]) als Eichkörper einer Minkowskischen Maßbestimmung zugrunde. Sind dann P und Q zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{S}$ mit den Ortsvektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so wird ihr Minkowskischer Abstand voneinander: $d(P, Q) = \frac{|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{e}|} \leq l$; denn wegen $\mathfrak{y}-\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B \subseteq \mathfrak{F} = l \cdot \mathfrak{E}$ ist $|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}| \leq l|\mathfrak{e}|$. Ist speziell $P \in \sigma_i$, $Q = E_i$, so ist $\mathfrak{y}-\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i - \mathfrak{x} \in \tau_i$, d.h. der Endpunkt von $\mathfrak{y}-\mathfrak{x}$ gehört dem Rand von $\mathfrak{F}$ an. Jetzt gilt: $|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}| = l \cdot |\mathfrak{e}|$ und damit $d(P, Q) = l$. l ist also Durchmesser von $\mathfrak{S}$ in bezug auf die durch $\mathfrak{E}$ induzierte Minkowskische Maßbestimmung.

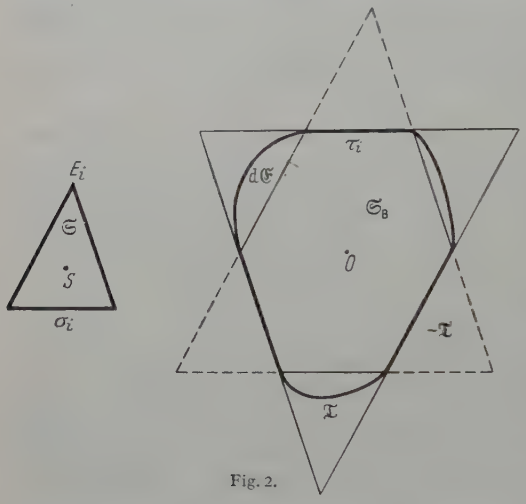

Fig. 2.

Wir wollen nun zeigen, daß kein Punkt Z von M_n mit $d(Z, P) < \frac{n}{n+1} l$ für alle P von $\mathfrak{S}$ existiert. Zu diesem Zwecke nehmen wir einmal an, es gebe einen solchen Punkt Z mit dem Ortsvektor $\mathfrak{z}$. Dann muß Z in denjenigen offenen Halbräumen liegen, welche durch die durch den Schwerpunkt S von $\mathfrak{S}$ gehenden, zu den σ_i parallelen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen begrenzt werden und E_i enthalten $(i=0, 1, \ldots, n)$. Anderenfalls wäre nämlich $\frac{d(Z, E_i)}{d(F_i, E_i)} = \frac{|Z E_i|}{|F_i E_i|} \geq \frac{n}{n+1}$, wenn F_i der Schnittpunkt der durch E_i und Z gehenden Geraden mit der durch σ_i gehenden $(n-1)$-dimensionalen Ebene ist. Dies steht aber wegen der aus $l\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{T}$ folgenden Ungleichung $d(F_i, E_i) \geq l$ mit der Voraussetzung $\frac{d(Z, E_i)}{l} < \frac{n}{n+1}$ im Widerspruch. Aus der eben abgeleiteten Bedingung für die Lage von Z folgt nun $S \neq Z$, und für den Vektor $\mathfrak{z}$ ergibt sich: $\mathfrak{z} \neq 0$ und $\mathfrak{z}\mathfrak{n}_i < 0$ $(i=0, 1, \ldots, n)$. Dies bedeutet aber geometrisch, daß die Endpunkte aller Vektoren $\mathfrak{n}_i$ in einer offenen Halbkugel der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel gelegen sind, was mit der bekannten Beziehung $\sum_{i=0}^{n} O(\sigma_i) \cdot \mathfrak{n}_i = 0$ für $\mathfrak{S}$ im Widerspruch steht, wobei $O(\sigma_i)$ die (positiven)

[5]) Der Nullpunkt von M_n sei das Zentrum der Streckung von $\mathfrak{F}$.

Inhalte der σ_i bedeuten. Die Annahme der Existenz von Z hat sich also als falsch erwiesen.

Hiermit haben wir durch Angabe eines Beispiels bewiesen, daß der Vergrößerungsfaktor von Satz 1 allgemein nicht verkleinert werden kann. Fragt man sich nun nach allen den Fällen, wo der kleinstmögliche Vergrößerungsfaktor oder „Umkugelradius" genau gleich $\frac{n}{n+1} \cdot d$ ist, so zeigt sich, daß dies auch nur im Falle unseres Beispiels zutrifft; wir behaupten nämlich:

Satz 2. *Ist $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in einem n-dimensionalen Minkowskischen Raum M_n mit dem konvexen Eichkörper $\mathfrak{E}$, ist d der Minkowskische Durchmesser von $\mathfrak{K}$ und existiert kein Punkt Z von M_n mit $d(Z, P) < \frac{n}{n+1} \cdot d$ für alle P von $\mathfrak{K}$, d.h. ist der Umkugelradius von $\mathfrak{K}$ gleich $\frac{n}{n+1} d$, so ist $\mathfrak{K}$ ein n-Simplex $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{E}$ ist von folgender Art: $d \cdot \mathfrak{E}$ enthält den Breitenkörper $\mathfrak{S}_B$ von $\mathfrak{S}$ und ist in demjenigen $-(n+1)$-fach vergrößerten, homothetischen Bild von $\mathfrak{S}$ enthalten, dessen Schwerpunkt mit dem Nullpunkt des M_n zusammenfällt*[6]). *Das Zentrum jeder Umkugel von $\mathfrak{S}$ ist der Schwerpunkt von $\mathfrak{S}$, sie ist also in diesem Falle eindeutig bestimmt*[7]).

Beweis. Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, der Schwerpunkt $\mathfrak{K}$ falle mit dem Nullpunkt von M_n zusammen, da sich die Minkowskische Länge einer gerichteten Strecke bei einer Translation nicht ändert. Ebenso dürfen wir annehmen, $\mathfrak{K}$ sei n-dimensional, denn für ein niedriger dimensionales $\mathfrak{K}$ ist nach Satz 1 der Vergrößerungsfaktor sicher kleiner als $\frac{n}{n+1} d$. Ist nun $\mathfrak{n}$ die (nach außen weisende) Normale und $h = h(\mathfrak{n})$ $(h > 0)$ die Stützfunktion von $\mathfrak{K}$, so betrachten wir den Durchschnitt $\mathfrak{K}^*$ aller abgeschlossenen Halbräume, welche durch

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{n} \leq h(\mathfrak{n}) - \frac{1}{n+1}\left(h(\mathfrak{n}) + h(-\mathfrak{n})\right) \equiv p(\mathfrak{n})$$

definiert sind. $\mathfrak{K}^*$ ist konvex, abgeschlossen und enthält sicher S wegen $p(\mathfrak{n}) = \frac{1}{n+1}\left(n\,h(\mathfrak{n}) - h(-\mathfrak{n})\right) \geq 0$ (wie leicht aus Lemma 1 folgt), ist also nicht leer. Natürlich ist $\mathfrak{K}^*$ in $\mathfrak{K}$ enthalten. Wir beweisen nun zunächst:

Lemma 3. *$\mathfrak{K}^*$ enthält entweder nur S allein, oder es enthält innere Punkte.*

Dazu untersuchen wir im nichttrivialen Falle $n > 1$ die wegen der Stetigkeit von $p(\mathfrak{n})$ abgeschlossene Menge N der Endpunkte aller im Nullpunkt angetragenen Normalenvektoren $\mathfrak{n}$, für welche $p(\mathfrak{n}) = 0$ ist. Es können drei Fälle eintreten:

1. N liegt auf einer offenen Halbkugel der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel S_{n-1},

[6]) $\mathfrak{E}$ ist in diesem Extremfall also nicht eindeutig bestimmt, da für $n > 1$ das n-Simplex $-(n+1)\,\mathfrak{S}$ mit $n+1$ Ecken von dem Polyeder $\mathfrak{S}_B$ mit $n(n+1)$ Ecken verschieden sein muß.

[7]) Man kann durch Angabe von Beispielen zeigen, daß $\mathfrak{K}$ im allgemeinen mehrere Umkugeln besitzt.

2. N liegt auf einer abgeschlossenen, aber keiner offenen Halbkugel von S_{n-1},

3. N liegt auf keiner abgeschlossenen Halbkugel von S_{n-1}.

Im ersten Fall überzeugt man sich leicht, daß $\mathfrak{K}^*$ innere Punkte enthalten muß. $\mathfrak{K}^*$ enthält nämlich sicher den Kugelsektor mit inneren Punkten, welcher Durchschnitt aller derjenigen abgeschlossenen Halbräume ist, welche durch $\mathfrak{x}\,\mathfrak{n} \leqq 0$ für $\mathfrak{n}\,\mathfrak{w} \geqq \delta$ und $\mathfrak{x}\,\mathfrak{n} \leqq c$ für $\mathfrak{n}\,\mathfrak{w} < \delta$ bei passend gewählten $\mathfrak{w}$, δ und c mit $\mathfrak{w}^2 = 1$, $\delta > 0$ und $c > 0$ definiert sind.

Im zweiten Fall müßte eine Teilmenge N' von N auf einer $(n-2)$-dimensionalen, in der S_{n-1} gelegenen Einheitskugel S_{n-2}, aber auf keiner offenen Halbkugel von S_{n-2} liegen, da sonst N schon auf einer offenen Halbkugel von S_{n-1} gelegen wäre. Dieser zweite Fall kann nicht eintreten, wie die folgende Überlegung zeigt: Setzen wir nämlich die Existenz eines solchen N' voraus und projizieren $\mathfrak{K}$ durch Parallelprojektion orthogonal auf die durch S_{n-2} gehende $(n-1)$-dimensionale Ebene ε, so erhalten wir als Projektion einen $(n-1)$-dimensionalen, konvexen Körper $\mathfrak{K}_1$, welcher den Nullpunkt als inneren Punkt enthält und die folgende Eigenschaft besitzt: Die zu den Richtungen $\mathfrak{n}'$ und $-\mathfrak{n}'$ ($\mathfrak{n}'$ sei der Ortsvektor eines beliebigen Punktes von N') gehörenden Stützebenen von $\mathfrak{K}$ projizieren sich in zwei parallele Stützebenen von $\mathfrak{K}_1$ derart, daß die in ε liegende und dazu parallele, durch den Nullpunkt gehende $(n-2)$-dimensionale Ebene von diesen beiden Stützebenen die Abstände $h(\mathfrak{n}')$ und $h(-\mathfrak{n}')$ besitzt, welche wegen

$$p(\mathfrak{n}') = \frac{1}{n+1}\left(n\,h(\mathfrak{n}') - h(-\mathfrak{n}')\right) = 0$$

im Verhältnis $1:n$ zueinander stehen. Sei nun S_1 der Schwerpunkt von $\mathfrak{K}_1$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{s}_1$. Dann folgt aus Lemma 1 wegen der Dimensionszahl $n-1$ von $\mathfrak{K}_1$, daß S_1 in dem durch $\mathfrak{x}\,\mathfrak{n}' < 0$ gegebenen offenen Halbraum von ε liegt. Es gilt also für alle $\mathfrak{n}'$: $\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{n}' < 0$; d. h. N' liegt gegen Annahme auf einer offenen Halbkugel von S_{n-2}. Dieser Widerspruch schließt den Fall 2 aus.

Im dritten Fall endlich kann $\mathfrak{K}^*$ nur S allein enthalten. Enthielte nämlich $\mathfrak{K}^*$ noch den Punkt $A \neq S$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{a} \neq 0$, so bestünden für die Ortsvektoren $\mathfrak{n}$ aller Punkte von N die Beziehungen: $\mathfrak{a}\,\mathfrak{n} \leqq p(\mathfrak{n}) = 0$, d. h. N wäre gegen Voraussetzung in einer abgeschlossenen Halbkugel von S_{n-1} enthalten. Hiermit haben wir den Beweis unseres Lemmas vollständig erbracht; wir merken noch an, daß im dritten Falle N mindestens $n+1$ verschiedene Punkte enthalten muß. Bestünde nämlich N aus den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k \leqq n)$, so läge N auf derjenigen Halbkugel von S_{n-1}, welche von dem Schnitt von einer durch den Nullpunkt und durch $A_2, \ldots, A_k$ gehenden, $(n-1)$-dimensionalen Ebene mit S_{n-1} begrenzt wird und den Punkt A_1 enthält, w. z. b. w.

Lemma 4. *$\mathfrak{K}^*$ enthält dann und nur dann S als einzigen Punkt, wenn $\mathfrak{K}$ ein n-Simplex ist.*

Für $n = 1$ ist dies trivial; zum Beweise für $n > 1$ nehmen wir erstens an, $\mathfrak{K}^*$ enthielte S als einzigen Punkt. Dann gibt es nach dem beim Beweis von

Lemma 3 Gesagten $n+1$ verschiedene Einheitsvektoren $\mathfrak{n}_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ mit $p(\mathfrak{n}_i)=0$, d.h. mit $\frac{h(-\mathfrak{n}_i)}{h(\mathfrak{n}_i)}=n$. Nach Lemma 1 ist deshalb $\mathfrak{K}$ Projektionskegel eines in der zu $\mathfrak{n}_i$ orientiert orthogonalen Stützebene ε_i von $\mathfrak{K}$ liegenden, $(n-1)$-dimensionalen, konvexen Körpers $\mathfrak{L}_i$ von einem nicht auf ε_i liegendem Zentrum C_i aus. Nun gilt $C_i \in \mathfrak{L}_k$ für alle $i \neq k$ $(i, k=0, 1, \ldots, n)$. Wäre dies nämlich nicht so, so hätte die $(n-1)$-dimensionale Stützebene ε_k von $\mathfrak{K}$ wegen $\mathfrak{n}_i \neq \mathfrak{n}_k$ und damit $\varepsilon_i \neq \varepsilon_k$ nur Punkte des höchstens $(n-2)$-dimensionalen Durchschnitts von $\mathfrak{L}_i$ und ε_k mit $\mathfrak{K}$ gemein, was einen Widerspruch mit der Tatsache ergibt, daß ε_k mit $\mathfrak{K}$ genau $\mathfrak{L}_k$ gemein hat und $\mathfrak{L}_k$ $(n-1)$-dimensional ist. Die Ecken C_i sind alle linear unabhängig. Wäre nämlich etwa C_0 von $C_1, C_2, \ldots, C_n$ linear abhängig, so läge es sicher auf jeder durch die letzteren Punkte gehenden $(n-1)$-dimensionalen Ebene, also insbesondere auf ε_0 gegen Voraussetzung über C_0. Alle Punkte C_i spannen also ein n-Simplex $\mathfrak{S}$ auf, welches in $\mathfrak{K}$ enthalten ist. Da aber andererseits durch die Punkte $C_0, C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_n$ von $\mathfrak{S}$ die Stützebenen ε_i von $\mathfrak{K}$ gehen, muß $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{S}$ identisch sein.

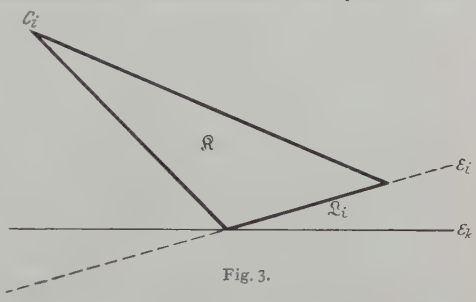

Fig. 3.

Umgekehrt kann der zu einem n-Simplex $\mathfrak{S}$ gehörende Körper $\mathfrak{K}^*$ keine inneren Punkte enthalten, da sonst nach dem Beweis von Lemma 3 die Menge N auf einer offenen Halbkugel von S_{n-1} gelegen wäre. Da aber N gerade aus den Endpunkten der nach außen weisenden Normalenvektoren $\mathfrak{n}_i$ der Seiten σ_i von $\mathfrak{S}$ besteht $(i=0, 1, \ldots, n)$, wie sich aus Lemma 1 ergibt, würde dies mit der bekannten Beziehung $\sum O(\sigma_i) \cdot \mathfrak{n}_i = 0$, $O(\sigma_i) > 0$ im Widerspruch stehen (vgl. S. 40). Für ein n-Simplex ist also $\mathfrak{K}^* = S$, w. z. b. w.

Schluß des Beweises von Satz 2. Wir haben beim Beweis von Lemma 3 und Lemma 4 nur benutzt, daß $\mathfrak{K}$ ein beliebiger, n-dimensionaler, konvexer Körper ist, ohne das spezielle Verhalten von $\mathfrak{K}$ in bezug auf die Minkowski-Metrik von M_n weiter auszunützen. Dies werden wir jetzt tun müssen, um den Satz 2 zu beweisen. Wir haben dazu viererlei zu zeigen: a) $\mathfrak{K}=\mathfrak{S}$, b) $d \cdot \mathfrak{F} \geqq \mathfrak{S}_B$, c) $d \cdot \mathfrak{F} \leqq -(n+1)\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$, d) $Z=S$.

a) Nach Lemma 3 und Lemma 4 ist $\mathfrak{K}=\mathfrak{S}$, wenn wir bewiesen haben, daß $\mathfrak{K}^*$ keine inneren Punkte enthält. Wir führen diesen Beweis indirekt und nehmen einmal an, $\mathfrak{K}^*$ enthielte den inneren Punkt I. Ist jetzt P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{K}$, so schneiden wir die von I aus nicht durch P gehende Halbgerade einer durch I und P gehenden Geraden mit dem Rand von $\mathfrak{K}$. Durch den so erhaltenen Schnittpunkt B legen wir die Stützebene ε_2 an $\mathfrak{K}$. Weiter seien A und A' die Schnittpunkte der von I aus entgegengesetzt laufenden Halbgeraden mit dem Rand von $\mathfrak{K}$ und der anderen, zu ε_2 parallelen Stützebene ε_1 an $\mathfrak{K}$. Wir bezeichnen diejenige zwischen ε_1 und ε_2 liegende und zu ε_1 parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene, deren Abstände a_1 und a_2

von ε_1 und ε_2 sich wie $n:1$ verhalten, mit ε_3, und den Schnittpunkt von ε_3 mit der Strecke $A'B$ mit D. Nach Definition von $\mathfrak{K}^*$ liegt D zwischen B und I und ist von I verschieden, da I ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}^*$ sein sollte. Nun gilt: $|IA| \leqq |IA'| < |A'D|$ und $|IB| > |BD|$; also $\frac{|IB|}{|IA|} > \frac{|BD|}{|A'D|} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{n}$ oder $\frac{|IB|}{|IA|} + 1 = \frac{|BA|}{|IA|} > \frac{n+1}{n}$ oder $|IA| < \frac{n}{n+1}|BA|$. Wegen $|IP| \leqq |IA|$ ist deshalb $|IP| < \frac{n}{n+1}|BA|$ und somit $d(I,P) < \frac{n}{n+1} d(B,A) \leqq \frac{n}{n+1} \cdot d$ (da $\overrightarrow{IP}$ und $\overrightarrow{BA}$ gleichgerichtete Vektoren sind, zu welchen derselbe Eichvektor gehört). Dies steht mit unserer Voraussetzung über die

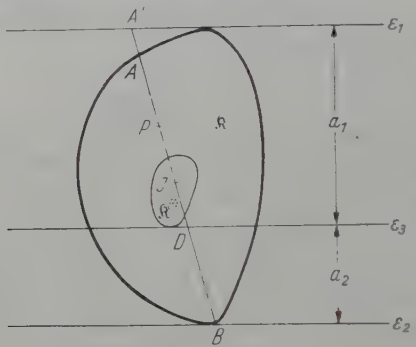

Fig. 4.

Extremeigenschaft von $\mathfrak{K}$ in Satz 2 im Widerspruch. Also ist unsere Annahme, $\mathfrak{K}^*$ enthielte innere Punkte, falsch; und es ist in der Tat $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}$.

b) Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes R aus $\mathfrak{S}_B$ hat die Gestalt $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}$, wobei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Ortsvektoren zweier Punkte P und Q von $\mathfrak{S}$ sind. Ist $\mathfrak{e}$ der zu $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}$ gehörende Eichvektor, so folgt aus $d(P,Q) = \frac{|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}|}{|\mathfrak{e}|} \leqq d$: $|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| \leqq d|\mathfrak{e}|$. R ist also auf der Verbindungsstrecke vom Nullpunkt zum Endpunkt des Vektors $d\mathfrak{e}$ gelegen und gehört hiermit auch zu $d \cdot \mathfrak{E}$, da ja $\mathfrak{E}$ und damit $d \cdot \mathfrak{E}$ sternförmig um den Nullpunkt angeordnet sind. Damit ist $d\mathfrak{E} \supseteqq \mathfrak{S}_B$ gezeigt.

c) Wir bezeichnen die Verbindungssehnen vom Schwerpunkt S von $\mathfrak{S}$ mit dessen Ecken E_i mit s_i und die Schnittpunkte von s_i mit den $(n-1)$-dimensionalen, E_i gegenüberliegenden Seiten σ_i von $\mathfrak{S}$ mit S_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Um nun die Beziehung $d\mathfrak{E} \subseteqq -(n+1)\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$ zu zeigen, ist es jetzt nur noch nötig, für alle i die Gleichungen $d(S_i, E_i) = d$ zu beweisen. Diese Gleichungen sind nämlich gleichbedeutend mit $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{f}_i = d\mathfrak{e}_i$, wenn $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{f}_i$ die Ortsvektoren von E_i und S_i sind und $\mathfrak{e}_i$ der $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{f}_i$ gleichgerichtete Eichvektor ist. Nehmen wir dies einmal als bewiesen an, so ist der durch den Endpunkt von $d \cdot \mathfrak{e}_i$ dargestellte Randpunkt U_i von $d \cdot \mathfrak{E}$ Schwerpunkt, also innerer Punkt des durch die Endpunkte der Ortsvektoren $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k$ $(k \neq i)$ aufgespannten $(n-1)$-Simplexes τ_i, dessen Eckpunkte sämtlich $\mathfrak{S}_B$, also wegen $\mathfrak{S}_B \subseteqq d \cdot \mathfrak{E}$ ebenfalls

$d \cdot \mathfrak{E}$ angehören. Dies ist nur möglich, wenn jede Stützebene von dem konvexen $d \cdot \mathfrak{E}$ durch U_i mit der durch τ_i gehenden Ebene η_i zusammenfällt. Diese Stützebenen η_i von $d \cdot \mathfrak{E}$ begrenzen aber nach früheren Betrachtungen gerade das n-Simplex $\mathfrak{T} = -(n+1)\,\mathfrak{S}$, d.h. es ist in der Tat $d \cdot \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{T}$.

Wir müssen jetzt schließlich noch den Beweis von $d(S_i, E_i) = d$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ nachholen. Zu diesem Zwecke nehmen wir einmal an, es sei etwa $d(S_0, E_0) = d_0 < d$, und fassen einen im Innern von $\mathfrak{S}$ gelegenen, beliebigen Punkt P ins Auge, durch welchen wir in Richtung des beliebigen Einheitsvektors $\mathfrak{m}$ eine (orientierte) Gerade legen, welche den Rand von $\mathfrak{S}$ zuerst in A und dann in B schneide. Wir untersuchen nun die Funktion: $v(P, \mathfrak{m}) = \frac{|PA|}{|PB|}$. Sie ist offenbar in P und $\mathfrak{m}$ stetig und wohldefiniert. Nach Lemma 1 und Lemma 2 gilt für $P = S$: $v(S, \mathfrak{m}) \leqq n$. Das Maximum n kann von $v(S, \mathfrak{m})$ wegen der Beweise dieser beiden Lemmas nur angenommen werden, wenn $\mathfrak{S}$ Projektionskörper mit A als Zentrum und (eigentlicher) Ecke ist, d.h. wenn $A = E_i$ ist. Die $n+1$ Richtungen mit $v(S, \mathfrak{m}) = n$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Für alle anderen Richtungen ist $v(S, \mathfrak{m}) < n$. Es sei nun T ein Punkt auf der Strecke $S S_0$ mit $0 < |ST| < \delta$, wobei über $\delta > 0$ noch folgendermaßen verfügt werden soll: Wir wählen zu irgendeinem d_1 mit $d_0 < d_1 < d$ ein solches $\Delta > 0$, daß für alle Punkte F von σ_0 mit $\left| \frac{\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{f}}{|\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{f}|} - \mathfrak{m}_0 \right| < \Delta$ ($\mathfrak{f}$ ist der Ortsvektor von F) $d(F, E_0) < d_1$ ist, was wegen der Annahme $d(S_0, E_0) = d_0 < d$ stets möglich ist. Sei weiter n_1 eine reelle Zahl mit $n_1 > n$ und $\frac{n_1}{n_1 + 1} d_1 < \frac{n}{n+1} d$. Schließlich bezeichnen wir mit n_2 das Maximum von $v(S, \mathfrak{m})$ für den abgeschlossenen Bereich aller $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_i| \geqq \Delta$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Dann gibt es wegen $n_2 < n$ sicher ein $n_3 > n_2$ mit $n_1 - n > n - n_3$ und $n_3 < n$. Jetzt sei endlich $\delta > 0$ so klein gewählt, daß $|v(T, \mathfrak{m}) - v(S, \mathfrak{m})| < n - n_3$ gleichmäßig für alle $\mathfrak{m}$ gilt. Nun wird für alle $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_i| \geqq \Delta$:

$$(1) \qquad v(T, \mathfrak{m}) \leqq v(S, \mathfrak{m}) + |v(T, \mathfrak{m}) - v(S, \mathfrak{m})| < n_2 + (n - n_3) = n - (n_3 - n_2) < n$$

und für die $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_i| < \Delta$:

$$(2) \qquad v(T, \mathfrak{m}) \leqq v(S, \mathfrak{m}) + |v(T, \mathfrak{m}) - v(S, \mathfrak{m})| < n + (n - n_3) < n_1.$$

Weiter gilt für alle $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_{i'}| < \Delta$ $(i' = 1, 2, \ldots, n)$:

$$(3) \qquad v(T, \mathfrak{m}) \leqq v(T, \overline{\mathfrak{m}}_{i'}),$$

wobei $\overline{\mathfrak{m}}_{i'}$ die Richtung des von T nach $E_{i'}$ zeigenden Vektors besitzt, wenn nur von vorneherein Δ und δ hinreichend klein gewählt waren. Der Ort aller Punkte A mit $\frac{|TA|}{|TB|} = v(T, \overline{\mathfrak{m}}_{i'})$ und $B \in \sigma_{i'}$ ist nämlich ein Teil der zu $\sigma_{i'}$ parallelen Stützebene durch $E_{i'}$ an $\mathfrak{S}$. Andererseits ist aber

$$(4) \qquad v(T, \overline{\mathfrak{m}}_{i'}) < n,$$

wie man folgendermaßen einsieht: Da der geometrische Ort aller Punkte, welche die durch $E_{i'}$ gehenden Sehnen von $\mathfrak{S}$ im Verhältnis $1 : n$ teilen, die

zu $\sigma_{i'}$ parallele, durch S gehende, $(n-1)$-dimensionale Ebene $\pi_{i'}$ ist, ist $v(T, \overline{\mathfrak{m}}_{i'}) = \frac{|TE_{i'}|}{|TG_{i'}|} < n$ ($G_{i'}$ sei der Schnittpunkt der durch T und $E_{i'}$ gehenden Geraden mit $\sigma_{i'}$) mit der Tatsache gleichbedeutend, daß T in dem durch $\pi_{i'}$ begrenzten, $E_{i'}$ enthaltenden offenen Halbraum liegt, was nach Definition von T auch zutrifft, da T auf der Strecke SS_0 liegt und S_0 diesem Halbraum angehört. Die Ungleichungen (1), (2), (3) und (4) lauten zusammengefaßt: $v(T, \mathfrak{m}) < n_1$ für $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0| < \Delta$ und $v(T, \mathfrak{m}) < n$ für alle übrigen $\mathfrak{m}$; oder wegen $v(T, \mathfrak{m}) = \frac{|TA|}{|TB|}$: $d(T, A) < \frac{n_1}{n_1 + 1} d(B, A)$ für $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0| < \Delta$ und $d(T, A) < \frac{n}{n+1} d(B, A)$ für alle übrigen $\mathfrak{m}$. Nun sieht man aber leicht auf eine zur vorigen Betrachtung analoge Weise: $d(B, A) \leqq d(F, E_0)$ für $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0| < \Delta$, wenn die von B nach A und von $F \in \sigma_0$ nach E_0 führenden Vektoren beide parallel zu $\mathfrak{m}$ sind; d.h. nach Erklärung von Δ ist $d(B, A) \leqq d(F, E_0) < d_1$. Für die übrigen $\mathfrak{m}$ gilt trivialerweise $d(B, A) \leqq d$, sodaß wegen der Definition von n_1 folgende Ungleichungen richtig sind: $d(T, A) < \frac{n_1}{n_1 + 1} d_1 < \frac{n}{n+1} d$ für $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0| < \Delta$ und $d(T, A) < \frac{n}{n+1} d$ für die übrigen $\mathfrak{m}$. Ist P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{S}$ und A der Schnittpunkt einer von T aus durch P gehenden Halbgeraden mit dem Rand von $\mathfrak{S}$, so folgt aus den obigen Ungleichungen allgemein: $d(T, P) \leqq d(T, A) < \frac{n}{n+1} d$ im Gegensatz zur Voraussetzung über $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ von Satz 2. Hiermit ist unsere Annahme $d(S_0, E_0) < d$ zu einem Widerspruch geführt und somit $d\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{T}$ bewiesen.

d) Wäre das Zentrum Z einer Umkugel vom Radius $\frac{n}{n+1} d$ von $\mathfrak{S}$ von dem Schwerpunkt S von $\mathfrak{S}$ verschieden, so hätten wir, wie sich nach einer leichten Modifikation des Beweisgangs von S. 40 zeigt, für die Ortsvektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{z}$ von S und Z und die (nach außen weisenden) Normalenvektoren $\mathfrak{n}_i$ der $(n-1)$-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{S}$ die Beziehungen $(\mathfrak{z} - \mathfrak{f})\,\mathfrak{n}_i \leqq 0$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). Somit wären wegen $\mathfrak{z} - \mathfrak{f} \neq 0$ die Endpunkte der $\mathfrak{n}_i$ auf einer abgeschlossenen Halbkugel der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel S_{n-1} enthalten, und nach dem zweiten Teil des Beweises von Lemma 3 wären dann diese Punkte schon auf einer offenen Halbkugel von S_{n-1} enthalten, was nach dem am Schluß von Lemma 4 Gesagten unmöglich ist. Also ist in der Tat $Z = S$.

Damit ist der Beweis von Satz 2 vollendet, w. z. b. w.

Bemerkungen.

1. Um $\mathfrak{R}$ durch den Extremfall des Analogons der JUNGschen Ungleichung in der Minkowski-Geometrie nach Satz 2 als Simplex zu kennzeichnen, war die Voraussetzung der Konvexität von $\mathfrak{R}$ wesentlich, der Extremfall tritt nämlich (unter Zugrundelegung desselben Eichkörpers) auch ein, wenn etwa $\mathfrak{R}$ nur aus den Eckpunkten des entsprechenden Simplexes besteht.

2. Wir haben die Voraussetzung der Konvexität vom Eichkörper $\mathfrak{E}$ bisher nur beim Beweis von $d \cdot \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{T}$ beim Vorliegen des Extremfalls benutzt; alle

übrigen Überlegungen, insbesondere Satz 1 und die Charakterisierung eines konvexen $\mathfrak{K}$ als Simplex beim Extremfall gelten auch für ein sternförmig um den Nullpunkt gelagertes $\mathfrak{E}$.

3. Auch für ein zentralsymmetrisches $\mathfrak{E}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, d.h. für eine symmetrische Minkowskische Metrik kann der Extremfall erreicht werden; wir brauchen in unserem Beispiel dazu nur etwa $d \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{S}_B$ zu setzen. Dies ist für $n = 2$ sogar die einzig mögliche Art für $\mathfrak{E}$ im Extremfall, während für $n > 2$ mehrere Möglichkeiten für $\mathfrak{E}$ bestehen. So können wir zum Beispiel $d \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{U}$ setzen, wobei $\mathfrak{U}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{T}$ und $-\mathfrak{T}$ ist. $\mathfrak{U}$ ist, wie man nachrechnen kann, für alle $n > 2$ von $\mathfrak{S}_B$ verschieden.

4. Wenn $\mathfrak{E}$ eine gewöhnliche n-dimensionale Vollkugel ist, d.h. bei der euklidischen Metrik kann der Extremfall für $n > 1$ nicht mehr erreicht werden, da ja beim Extremfall nach Satz 2 der Rand von $d \cdot \mathfrak{E}$ die ebenen $(n-1)$-Simplizes τ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ enthalten muß. Hier gilt die für $n > 1$ schärfere Jungsche Ungleichung, daß der Umkugelradius nicht größer als $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \cdot d$ sein kann [1], [2], [3]. Der Extremfall der Jungschen Ungleichung, welcher eintritt, wenn $\mathfrak{K}$ ein regelmäßiges Simplex ist, kennzeichnet ein (als konvex vorausgesetztes) $\mathfrak{K}$ nicht als derartige Figur; er liegt nämlich z.B. bei $n = 2$ für alle zwischen einem gleichseitigen Dreieck und dem ihm umschriebenen Reuleaux-Dreieck liegenden konvexen $\mathfrak{K}$ vor.

Wir wenden uns jetzt noch kurz zu dem zu unserem bisherigen Problem dualen Problem der Abschätzung des Radius einer Minkowskischen „Inkugel" eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ zu. Als eine Inkugel bezeichnen wir dabei ein maximal vergrößertes, homothetisches Bild des Eichkörpers $\mathfrak{E}$ des Minkowskischen Raumes, welches in $\mathfrak{K}$ liegt; und als den Radius dieser Inkugel definieren wir wie früher das zugehörige Vergrößerungsverhältnis. Um nun diesen Radius abschätzen zu können, müssen wir noch folgende Definitionen vorausschicken: Der Minkowskische Abstand der $(n-1)$-dimensionalen Ebene ε_2 von der zu ε_2 parallelen $(n-1)$-dimensionalen Ebene ε_1 im n-dimensionalen Minkowskischen Raum ist das Minimum der Minkowskischen Längen aller von einem festen Punkt A_1 von ε_1 nach allen Punkten von ε_2 führenden Strecken. Diese Definition ist eine sinnvolle Verallgemeinerung der euklidischen Abstandsdefinition, und der so definierte Abstand ist zwar unsymmetrisch, er ist aber translationsinvariant und hängt nicht von der Wahl von A_1 ab. Er ist gleich dem euklidischen Abstand von ε_1 und ε_2, dividiert durch den euklidischen Abstand $h(\varepsilon)$ derjenigen zu ε_1 parallelen Stützebene ε an $\mathfrak{E}$ vom Nullpunkt, bei welcher das vom Nullpunkt auf sie gefällte Lot die Richtung des von A_1 auf ε_2 gefällten Lots besitzt. Weiter definieren wir den in Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ gemessenen Minkowskischen Abstand der beiden zu $\mathfrak{n}$ orthogonalen Stützebenen von $\mathfrak{K}$ als die in Richtung von $\mathfrak{n}$ gemessene Minkowskische Breite $e(\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{K}$ und nennen das Minimum aller $e(\mathfrak{n})$ die Minkowskische Dicke e von $\mathfrak{K}$. Jetzt gilt der zu Satz 1 duale

Satz 3. *Der Inkugelradius eines n-dimensionalen, konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ im Minkowskischen Raum M_n ist nicht kleiner als $\frac{e}{n+1}$, wenn e die Minkowskische Dicke von $\mathfrak{K}$ ist.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Schwerpunkt S von $\mathfrak{K}$ mit dem Nullpunkt 0 von M_n zusammenfällt. Wir betrachten nun das um $\frac{e}{n+1}$ mit dem Nullpunkt als Zentrum vergrößerte Bild $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{E}$. Ist dann $\mathfrak{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor und ε diejenige Stützebene von $\mathfrak{E}$, bei welcher das vom Nullpunkt auf sie gefällte Lot die Richtung von $\mathfrak{n}$ besitzt, so gilt für die Stützfunktion $g(\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{G}$: $g(\mathfrak{n}) = \frac{e}{n+1} h(\varepsilon)$; und für die Stützfunktion $h(\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{K}$ folgt aus Lemma 1 wegen $S = 0$:

$$\frac{h(-\mathfrak{n})}{h(\mathfrak{n})} \leqq n \text{ oder } h(\mathfrak{n}) \geq \frac{1}{n+1}\left(h(\mathfrak{n}) + h(-\mathfrak{n})\right) = \frac{e(\mathfrak{n})}{n+1} \cdot h(\varepsilon) \geq \frac{e}{n+1} h(\varepsilon) = g(\mathfrak{n}).$$

Hieraus ergibt sich natürlich $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{G} = \frac{e}{n+1} \mathfrak{E}$, w. z. b. w.

Über mögliche Extremfälle bei der Abschätzung von Satz 3 gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 4. *Ist $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in einem n-dimensionalen Minkowskischen Raum M_n mit dem konvexen Eichkörper $\mathfrak{E}$, ist e die Minkowskische Dicke von $\mathfrak{K}$ und ist der Inkugelradius von $\mathfrak{K}$ genau gleich $\frac{e}{n+1}$, so ist $\mathfrak{K}$ ein n-Simplex $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{E}$ ist von folgender Art: $e \cdot \mathfrak{E}$ ist im Breitenkörper $\mathfrak{S}_B$ von $\mathfrak{S}$ enthalten und wird von allen $(n-1)$-dimensionalen Seiten desjenigen $(n+1)$-fach vergrößerten, homothetischen Bildes von $\mathfrak{S}$ berührt, dessen Schwerpunkt mit dem Nullpunkt des M_n zusammenfällt. Das Zentrum jeder Inkugel von $\mathfrak{S}$ ist der Schwerpunkt von $\mathfrak{S}$, sie ist also in diesem Fall eindeutig bestimmt*[8]).

Der Beweis dieses Satzes läßt sich mit Hilfe von Lemma 1, Lemma 3 und Lemma 4 auf eine analoge und teilweise sogar einfachere Weise wie der Beweis von Satz 2 erbringen. Wir wollen deshalb diesen Beweis nicht im einzelnen darstellen, sondern nur noch die folgende Tatsache anführen, welche für den Beweis, daß $e \cdot \mathfrak{E}$ die $(n-1)$-dimensionalen Seiten von $(n+1)\,\mathfrak{S}$ berührt, von Wichtigkeit ist: Eine Inkugel eines n-Simplex $\mathfrak{S}$ berührt jede $(n-1)$-dimensionale Seite von $\mathfrak{S}$[9]). Wäre dies nämlich nicht der Fall, berührte die Inkugel etwa die Seite σ_i von $\mathfrak{S}$ nicht, so können wir durch eine Streckung der Inkugel mit dem Zentrum E_i (E_i sei die σ_i gegenüberliegende Ecke von $\mathfrak{S}$) dieselbe in ein vergrößertes, in $\mathfrak{S}$ liegendes, homothetisches Bild von $\mathfrak{E}$ überführen, was einen Widerspruch mit der Definition einer Inkugel ergibt.

Wir bemerken noch am Schluß, daß auch im Extremfall $\mathfrak{E}$ zentralsymmetrisch, d.h. die Minkowski-Metrik symmetrisch sein kann (man setze etwa $e\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_B$), und zwar ist auch hier $\mathfrak{E}$ nicht eindeutig bestimmt. Wenn $\mathfrak{E}$ eine

[8]) $\mathfrak{K}$ besitzt im allgemeinen mehrere Inkugeln.

[9]) Das Beispiel eines stumpfwinkligen Dreiecks in einer euklidischen Metrik zeigt, daß umgekehrt nicht jede Ecke von $\mathfrak{S}$ auf dem Rande seiner Umkugel liegen muß.

n-dimensionale, euklidische Vollkugel, d.h. wenn die Metrik euklidisch ist, so kann unser Extremfall nur für $n = 1$ und $n = 2$ erreicht werden, wo bei $n = 2$ $\mathfrak{S}$ dann speziell ein gleichseitiges Dreieck sein muß. Dies rechnet man aus den Bedingungen in Satz 4 nach. Für $n \geqq 3$ muß also für den euklidischen Inkugelradius r eines konvexen Körpers eine schärfere Abschätzung gelten. Dies ist in der Tat der Fall, denn nach P. STEINHAGEN [5] und H. GERICKE [6] gilt $r \geqq \frac{\sqrt{n+2}}{2(n+1)}\, e$ für ein gerades n und $r \geqq \frac{e}{2\sqrt{n}}$ für ein ungerades n.

Literatur.

[1] JUNG, H. W.: Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt. Crelles J. **123**, 241—257 (1901). — [2] SÜSS, W.: Durchmesser und Umkugel bei mehr. dimensionalen Punktmengen. Math. Z. **40**, 315—316 (1936). — [3] BLUMENTHAL, L. M. u. G. E. WAHLIN: On the spherical surface of smallest radius enclosing a bounded subse, of n-dimensional euclidean space. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 771—777 (1941). — [4] BOHNENBLUST, F.: Convex regions and projections in Minkowski spaces. Ann. of Math. **39** 301—308 (1938). — [5] STEINHAGEN, P.: Über die größte Kugel in einer konvexen Punktmenge. Hamb. Abh. **1**, 15—26 (1922). — [6] GERICKE, H.: Über die größte Kugel in einer konvexen Punktmenge. Math. Z. **40**, 317—318 (1936).

Freiburg i. B., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. November 1954.)

Barner, M.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 50—93 (1955)

Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen *).

Herrn Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

Martin Barner.

Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen begegnet man bei den verschiedensten Fragen der projektiven Differentialgeometrie. Auch für sich betrachtet stellen sie ein reizvolles geometrisches Gebilde dar. Dies liegt hauptsächlich an dem engen Zusammenhang mit den einparametrigen Quadrikscharen: Hüllt eine Quadrikschar eine Regelfläche ein, so berühren die Geraden der einen Erzeugendenschar der Quadrik an jeder Stelle auf der Regelfläche die Kurven einer Doppelverhältnisschar — und umgekehrt. Analytisch sind die Doppelverhältnisscharen in einem beliebigen Bezugssystem durch eine Riccatische Differentialgleichung gegeben.

Denkt man sich die Erzeugenden der Regelfläche durch die krummlinigen Asymptotenlinien projektiv aufeinander abgebildet, so definiert die Doppelverhältnisschar in diesem binären Gebiet eine projektive Bewegung[1]). Deutet man das binäre Gebiet nach Hesse als Kegelschnitt einer Hilfsebene, so führt die projektive Bewegung auf eine hyperbolische Bewegung[1]) in dieser Hilfsebene, wenn man den Kegelschnitt als Maßkegelschnitt betrachtet. In der Hilfsebene überblickt man die invarianten Eigenschaften einer Doppelverhältnisschar und kann unterscheiden, inwiefern diese auch bei asymptotenlinienerhaltenden Abbildungen bzw. bei Projektivabwicklung der Regelfläche erhalten bleiben.

Der erste Teil dieser Arbeit gibt zunächst einen direkten analytischen Aufbau der Theorie der Doppelverhältnisscharen [1][2]). Nach einer ersten geometrischen Deutung der gewonnenen Formeln [2] wird die zugehörige hyperbolische Bewegung in der Hilfsebene betrachtet und die Beziehungen zwischen beiden geometrischen Gebilden hergeleitet [3].

Der zweite Teil zeigt in einzelnen, lose miteinander verknüpften Abschnitten und Unterabschnitten geometrische Ergebnisse auf, wobei auch das analytische Rüstzeug ergänzt wird [4a; 6d, e; 8a]. Es kann sich dabei nur

*) Herrn G. Bol habe ich für sein großes Interesse an den vorliegenden Untersuchungen zu danken. Verschiedene Zusammenhänge und Ergebnisse gehen auf ihn zurück. Weitere Ergebnisse finden sich in seiner Projektiven Differentialgeometrie, Teil 3 (im Erscheinen).

Über die Grundgedanken dieser Arbeit habe ich auf der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in München 1952 berichtet.

[1]) Im kinematischen Sinne.

[2]) Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf Abschnitte und Teilabschnitte dieser Arbeit.

um eine Auswahl handeln. Manche Formeln sind, um weitere Anwendungen zu gestatten, in größerer Allgemeinheit abgeleitet als sie verwendet werden (insbesondere [7]).

Eine Klassifikation bezüglich des Zerfallens der charakteristischen Kurve der zugehörigen Quadrikschar [4] führt auf den wichtigen Sonderfall der schichtbildenden Doppelverhältnisscharen: Die charakteristische Kurve der Quadrikschar ist ein Vierseit [5].

Abschnitt 6 behandelt auffallende Eigenschaften der ebenen hyperbolischen Bewegung und den Zusammenhang mit der Geometrie der Doppelverhältnisscharen. Insbesondere wird nach Doppelverhältnisscharen gefragt, die invariant mit einem Kurvenpaar verknüpft sind [6e].

Die Kurven vierter Ordnung erster Art auf der zugehörigen Quadrik bilden sich auf Kegelschnitte der Hilfsebene ab [7f]. So gibt es auch invariant mit der Figur verknüpfte Kegelschnitte der Ebene [7d, e], die nicht wie die anderen zunächst in die Betrachtung eintretenden Größen invariant sind gegenüber Projektivabwicklung der Regelfläche.

Den Zusammenhang zwischen verschiedenen Doppelverhältnisscharen derselben Regelfläche behandelt Abschnitt 8.

Zum Schluß werden invariante Konstruktionen für Doppelverhältnisscharen aus gewissen Vorgaben des hyperbolischen Bildes angegeben [9a]. Dies wird angewendet auf die Theorie der Regelflächen bei Betrachtung der Prinzipalschar einer Regelfläche.

I. Allgemeiner Aufbau der Theorie.

1. Wir betrachten das geometrische Gebilde einer Doppelverhältnisschar auf einer Regelfläche[3]). Sind die Vektoren

$$\mathfrak{q}_i(t) = \{\overset{i}{q}_0(t), \overset{i}{q}_1(t), \overset{i}{q}_2(t), \overset{i}{q}_3(t)\}, \qquad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

für jedes t linear unabhängig, so stellen

$$\mathfrak{q}_1(t) + s\,\mathfrak{q}_2(t), \qquad s = \text{const} \tag{1.2}$$

die Kurven einer Dv-Schar dar. Umgekehrt läßt sich jede Dv-Schar so angeben. Man greife hierzu zwei Kurven der Schar heraus und normiere die zugehörigen Vektoren $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ so, daß auch $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ eine Scharkurve durchläuft. Auf Grund der vorausgesetzten Invarianz des Doppelverhältnisses in Abhängigkeit von t sind dann die Kurven der Schar durch (2) gegeben.

Wir gehen also aus von (2). Die Vektoren $\mathfrak{q}_1(t)$, $\mathfrak{q}_2(t)$ sind durch die Doppelverhältnisschar bis auf konstante Faktoren und bis auf eine gemeinsame Umnormungsfunktion $\varrho(t)$:

$$\bar{\mathfrak{q}}_1(t) = \varrho(t)\,\mathfrak{q}_1(t), \qquad \bar{\mathfrak{q}}_2(t) = \varrho(t)\,\mathfrak{q}_2(t) \tag{1.3}$$

festgelegt.

[3]) Im folgenden sprechen wir kurz von einer Dv-Schar.

Es sei die Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ keine Torse. Dann ist die Determinante

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2') \neq 0.$$

Wir können dann bei gegebener Parameterverteilung durch eine Umnormung (3)

$$(\bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \bar{\mathfrak{q}}_1', \bar{\mathfrak{q}}_2') = \text{const}$$

erreichen.

Wir denken uns die Darstellung von vornherein so eingerichtet. Es gilt also

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2') = k, \qquad k = \text{const}. \tag{1.4}$$

Damit nun diese Bedingung auch bei Übergang auf eine neue Parameterverteilung

$$t = f(t^*), \qquad \frac{dt^*}{dt} = \varphi(t), \qquad A(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi'}{\varphi} \tag{1.5}$$

erhalten bleibt, koppelt man mit einer Parametertransformation (5) die Umnormung

$$\mathfrak{q}_i^* = \varphi^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{q}_i, \qquad i = 1, 2. \tag{1.6}$$

Die gekoppelte Transformation nennt man *Sterntransformation*. Man wird auf das Verhalten der mit einer Dv-Schar verbundenen Größen bei Sterntransformation zu achten haben.

Nach Voraussetzung sind die Vektoren

$$\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{q}_1' = \mathfrak{s}_1, \quad \mathfrak{q}_2' = \mathfrak{s}_2 \tag{1.7}$$

linear unabhängig — wir wählen sie als Basisvektoren des bewegten Bezugssystems. Es gelten dann die Ableitungsgleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{q}_i' = \mathfrak{s}_i, \\ \mathfrak{s}_i' = \alpha_{i1}\,\mathfrak{q}_1 + \alpha_{i2}\,\mathfrak{q}_2 + \beta_{i1}\,\mathfrak{s}_1 + \beta_{i2}\,\mathfrak{s}_2, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \tag{1.8}$$

wobei wegen der Forderung (4)

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0 \tag{1.9}$$

ist.

Differentiert man nun (6), so folgt mittels (5) und (8)[4]

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_i^* = \frac{d\,\mathfrak{q}_i^*}{dt^*} &= \varphi^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_i + A\,\mathfrak{q}_i), \\ \frac{d\,\mathfrak{s}_i^*}{dt^*} &= \varphi^{-\frac{3}{2}}\left(\mathfrak{s}_i' + (A' - A^2)\,\mathfrak{q}_i\right) \\ &= \varphi^{-2}\left[\alpha_{ik} - A\,\beta_{ik} + (A' - A^2)\,\delta_{ik}\right]\mathfrak{q}_k^* + \varphi^{-1}\beta_{ik}\,\mathfrak{s}_k^*, \end{aligned} \qquad i = 1, 2.$$

Man liest hieran das Verhalten der Basisvektoren bei Sterntransformation ab:

$$\begin{cases} \mathfrak{q}_i^* = \varphi^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{q}_i, \\ \mathfrak{s}_i^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_i + A\,\mathfrak{q}_i), \end{cases} \qquad i = 1, 2. \tag{1.10}$$

[4]) Über gleiche Indizes in Produkten ist hier und im folgenden von 1 bis 2 zu summieren. δ_{ik} ist das KRONECKER-Symbol.

Für die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen gilt:

$$(1.11)\qquad \begin{cases} \alpha^*_{ik} = \varphi^{-2}[\alpha_{ik} - A\,\beta_{ik} + (A' - A^2)\,\delta_{ik}], \\ \beta^*_{ik} = \varphi^{-1}\beta_{ik}, \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Die Relationen der ersten Zeile schreibt man zweckmäßigerweise in der Form

$$(1.12)\qquad \begin{cases} \alpha^*_{12} = \varphi^{-2}(\alpha_{12} - A\,\beta_{12}), \\ \alpha^*_{22} - \alpha^*_{11} = \varphi^{-2}(\alpha_{22} - \alpha_{11} - A\,(\beta_{22} - \beta_{11})), \\ \alpha^*_{21} = \varphi^{-2}(\alpha_{21} - A\,\beta_{21}), \\ \alpha^*_{22} + \alpha^*_{11} = \varphi^{-2}(\alpha_{22} + \alpha_{11} + 2A' - 2A^2). \end{cases}$$

Hieraus und aus (11) folgt für die in s quadratischen Ausdrücke

$$(1.13)\qquad \begin{cases} \alpha \equiv \alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})\,s - \alpha_{21}\,s^2, \\ \beta \equiv \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})\,s - \beta_{21}\,s^2 \end{cases}$$

identisch in s das Transformationsverhalten:

$$(1.14)\qquad \begin{cases} \alpha^* = \varphi^{-2}(\alpha - A\,\beta), \\ \beta^* = \varphi^{-1}\beta. \end{cases}$$

Insbesondere ist also β halbinvariant vom Gewicht 1.

Die Ebenen des Raumes beziehen wir auf die Basisvektoren

$$(1.15)\qquad \mathfrak{Q}_1,\quad \mathfrak{Q}_2,\quad \mathfrak{S}_1,\quad \mathfrak{S}_2,$$

die durch die Produkttabelle

$$(1.16)\qquad \begin{array}{c|cccc} & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{s}_1 & \mathfrak{s}_2 \\ \hline \mathfrak{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathfrak{Q}_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathfrak{S}_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{S}_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

definiert sind. Zu $\mathfrak{Q}_1 + s\,\mathfrak{Q}_2$, $s = \text{const}$ gehört z. B. die Ebene durch die Erzeugende der Regelfläche und durch die Tangente an die Scharkurve $\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2$. Entsprechend wird $\mathfrak{S}_1 + s\,\mathfrak{S}_2$ von dieser Tangente und der Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ aufgespannt.

Aus (8) und der Produkttabelle (16) folgen die Ableitungsgleichungen für die Ebenenvektoren

$$(1.17)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Q}_1' = \mathfrak{S}_1 + \beta_{11}\mathfrak{Q}_1 + \beta_{12}\mathfrak{Q}_2, \\ \mathfrak{Q}_2' = \mathfrak{S}_2 + \beta_{21}\mathfrak{Q}_1 + \beta_{22}\mathfrak{Q}_2, \\ \mathfrak{S}_1' = \alpha_{22}\mathfrak{Q}_1 - \alpha_{12}\mathfrak{Q}_2, \\ \mathfrak{S}_2' = -\alpha_{21}\mathfrak{Q}_1 + \alpha_{11}\mathfrak{Q}_2. \end{cases}$$

Ein Punkt $\mathfrak{p}$ bzw. eine Ebene $\mathfrak{P}$ läßt sich in lokalen Punkt- bzw. Ebenenkoordinaten darstellen in der Form:

$$(1\,18)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p} = p_0\,\mathfrak{q}_1 + p_1\,\mathfrak{q}_2 + p_2\,\mathfrak{E}_1 + p_3\,\mathfrak{E}_2, \\ \mathfrak{P} = P_0\,\mathfrak{Q}_1 + P_1\,\mathfrak{Q}_2 + P_2\,\mathfrak{S}_1 + P_3\,\mathfrak{S}_2. \end{cases}$$

Die *Inzidenzbedingung* von Punkt $\mathfrak{p}$ und Ebene $\mathfrak{P}$ in lokalen Koordinaten entnimmt man der Produkttabelle:

$$(1.19)\qquad \mathfrak{P}\,\mathfrak{p} \equiv P_0 p_3 - P_1 p_2 - P_2 p_1 + P_3 p_0 = 0.$$

Die *Stationaritätsbedingung* für einen Punkt $\mathfrak{p}$ bzw. eine Ebene $\mathfrak{P}$ gewinnt man aus den Ableitungsgleichungen (8) bzw. (17):

$$(1.20)\qquad \begin{cases} -p_0' + \varrho\, p_0 = & & \alpha_{11} p_2 + \alpha_{21} p_3, \\ -p_1' + \varrho\, p_1 = & & \alpha_{12} p_2 + \alpha_{22} p_3, \\ -p_2' + \varrho\, p_2 = & p_0 & + \beta_{11} p_2 + \beta_{21} p_3, \\ -p_3' + \varrho\, p_3 = & & p_1 + \beta_{12} p_2 + \beta_{22} p_3; \end{cases}$$

$$(1.21)\qquad \begin{cases} -P_0' + \varrho\, P_0 = \beta_{11} P_0 + \beta_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 - \alpha_{21} P_3, \\ -P_1' + \varrho\, P_1 = \beta_{12} P_0 + \beta_{22} P_1 - \alpha_{12} P_2 + \alpha_{11} P_3, \\ -P_2' + \varrho\, P_2 = P_0, \\ -P_3' + \varrho\, P_3 = P_1. \end{cases}$$

Wir wollen uns noch überlegen, wie sich der Übergang zu den Basisvektoren

$$(1.22)\qquad \hat{\mathfrak{q}}_i = c_{ik}\,\mathfrak{q}_k, \qquad \hat{\mathfrak{E}}_i = c_{ik}\,\mathfrak{E}_k, \qquad \|c_{ik}\| = \text{const}, \qquad i = 1, 2$$

analytisch darstellt. Nach (8) wird

$$(1.23)\qquad \begin{cases} \hat{\mathfrak{q}}_i' = \hat{\mathfrak{E}}_i + c_{il}'\, c_{lk}^{-1}\, \hat{\mathfrak{q}}_k, \\ \hat{\mathfrak{E}}_i' = c_{il}\,\alpha_{lm}\, c_{mk}^{-1}\, \hat{\mathfrak{q}}_k + c_{il}\,\beta_{lm}\, c_{mk}^{-1}\, \hat{\mathfrak{E}}_k + c_{il}'\, c_{lk}^{-1}\, \hat{\mathfrak{E}}_k, \end{cases} \qquad i = 1, 2,$$

wenn man mit (c_{ik}^{-1}) die zu (c_{ik}) inverse Matrix bezeichnet.

$$(1.24)\qquad \hat{\mathfrak{q}}_1 + \hat{s}\,\hat{\mathfrak{q}}_2, \qquad \hat{s} = \text{const}$$

liefert wieder eine Dv-Schar. Wir werden sie weiter unten noch genauer betrachten. (24) fällt genau dann mit der Ausgangsschar zusammen, wenn

$$(1.25)\qquad c_{ik} = \text{const}.$$

Mit (25) gibt (24) eine gleichberechtigte Darstellung der Ausgangs-Dv-Schar und (22) das allgemeinste zulässige Bezugssystem an. Es wird dann

$$(1.26)\qquad \begin{cases} \hat{\mathfrak{q}}_i' = \hat{\mathfrak{E}}_i, \\ \hat{\mathfrak{E}}_i' = \hat{\alpha}_{ik}\,\hat{\mathfrak{q}}_k + \hat{\beta}_{ik}\,\hat{\mathfrak{E}}_k, \end{cases} \qquad i = 1, 2,$$

mit

$$(1.27)\qquad \hat{\alpha}_{ik} = c_{il}\,\alpha_{lm}\, c_{mk}^{-1}, \qquad \hat{\beta}_{ik} = c_{il}\,\beta_{lm}\, c_{mk}^{-1}.$$

Gegenüber diesen zulässigen Abänderungen des Bezugssystems (22) mit (25) sind die Größen

$$(1.28) \qquad \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}, \quad \alpha_{11}+\alpha_{22}, \quad \beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}, \quad \beta_{11}+\beta_{22}$$

invariant. $\beta_{11}+\beta_{22}$ verschwindet auch im neuen System, wie dies nach (4) sein muß. Da die β_{ik} Halbinvarianten sind, stellt

$$(1.29) \qquad ||\beta_{ik}|| = \beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}$$

eine Halbinvariante vom Gewicht 2 dar, die nur von der Dv-Schar und nicht von ihrer speziellen Darstellung abhängt. Das Verschwinden dieser Größe hat für die Dv-Schar geometrische Bedeutung. Ist aber $||\beta_{ik}|| \neq 0$, so kann man durch

$$(1.30) \qquad \tilde{t} = \int \sqrt{\pm||\beta_{ik}||}\, dt$$

einen invarianten Parameter in der Dv-Schar einführen.

Wie üblich sprechen sich dann die Hauptsätze aus: *Zwei Doppelverhältnisscharen sind dann und nur dann unter Beachtung der Parameterverteilung projektiv gleichwertig, falls zwischen den Koeffizienten α_{ik}, β_{ik} bzw. $\hat{\alpha}_{ik}, \hat{\beta}_{ik}$ Beziehungen der Art (27) bestehen, wobei (c_{ik}) eine verfügbare Matrix mit konstanten Koeffizienten ist. Sieht man von der Parameterverteilung ab, so kann man entsprechend nach Einführung des invarianten Parameters über projektive Gleichwertigkeit entscheiden.*

Nach (28) ist die Bedingung

$$(1.31) \qquad \alpha_{11}^* + \alpha_{22}^* = \varphi^{-2}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+2A'-2A^2) = 0$$

nicht von der speziellen Wahl der Darstellung abhängig. Denkt man sich einen solchen Parameter eingeführt, für den (31) gilt — man hat dazu eine Riccatische Differentialgleichung zu lösen —, dann bestimmen sich alle anderen Parameter dieser Eigenschaft aus

$$(1.32) \qquad A' - A^2 = 0,$$

und dies führt auf

$$(1.33) \qquad t^* = \frac{d_{11}t + d_{12}}{d_{21}t + d_{22}}, \qquad d_{ik} = \text{const}.$$

Durch (31) ist ein invarianter projektiver Parameter in der Dv-Schar eingeführt, d.h. die zugehörigen Parameter hängen durch linear-gebrochene Beziehungen zusammen. Diese Parameter mögen Cartansche *Parameter* der Dv-Schar heißen.

2. Wir kommen hier zu der geometrischen Deutung der angegebenen Formeln. Betrachten wir zunächst an einer festen Stelle $t=t_0$ die Gesamtheit der Geraden $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$, die zu verschiedenen Parameterverteilungen gehören. Es ist

$$(2.1) \qquad \mathfrak{s}_1^* + s\,\mathfrak{s}_2^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}[\mathfrak{s}_1 + A\,\mathfrak{q}_1 + s(\mathfrak{s}_2 + A\,\mathfrak{q}_2)],$$

und diese Geraden bilden also die eine Geradenschar der Quadrik

$$p_0 p_3 - p_1 p_2 = 0. \tag{2.2}$$

Wir nennen diese invariant mit der Dv-Schar verbundene Quadrik die zugehörende *Berührquadrik*. Die eine Geradenschar dieser Quadrik,

$$(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*) = \varphi^{-1}(\mathfrak{s}_1 + A\,\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_2 + A\,\mathfrak{q}_2), \tag{2.3}$$

zu der auch $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ selbst gehört, heißt die *konkordante Schar*; die andere Geradenschar,

$$(\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2, \mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2), \tag{2.4}$$

die *Transversalschar*. *Die konkordante Schar wird gebildet aus allen Geraden* $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$, *die zu verschiedenen Parameterverteilungen gehören; die Transversalschar besteht aus den Tangenten an die Kurven der Dv-Schar.* Natürlich berührt die Berührquadrik die Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$, denn die Geraden der Transversalschar haben diese Eigenschaft. Siehe Fig. 1.

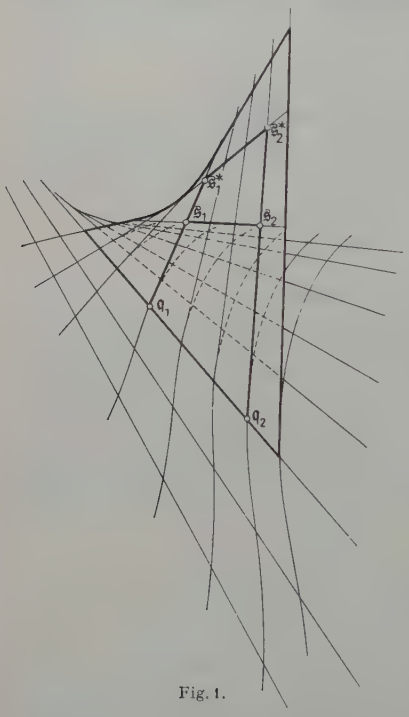

Fig. 1.

Es gilt aber auch die Umkehrung[5]: *Eine einparametrige Quadrikschar, die eine Regelfläche als Hüllfläche besitzt, definiert auf dieser eine Dv-Schar; die Tangenten an die Kurven der Dv-Schar bilden die eine Geradenschar der Quadrik.* Zum Beweis denke man sich die Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ durch die Quadrikschar eingehüllt. Eine die Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ berührende Quadrik hat in lokalen Koordinaten eine Gleichung der Gestalt

$$2(p_0 p_3 - p_1 p_2) + \tau_{12} p_2^2 + (\tau_{22} - \tau_{11}) p_2 p_3 - \tau_{21} p_3^2 = 0. \tag{2.5}$$

Die Tangenten an die Kurven

$$\mathfrak{q}_1(t) + s(t)\,\mathfrak{q}_2(t) \tag{2.6}$$

mit

$$2s' = \tau, \qquad \tau \equiv \tau_{12} + (\tau_{22} - \tau_{11})\,s - \tau_{21}\,s^2 \tag{2.7}$$

liegen auf der Quadrik (5). Da sich $s(t)$ aus einer RICCATIschen Differentialgleichung berechnet, schneiden die Scharkurven die Erzeugenden unter konstantem Doppelverhältnis, d.h. (5) definiert eine Dv-Schar. Die Beziehung von

[5]) R. DEAUX hat von diesem Gesichtspunkt aus die Dv-Scharen untersucht. DEAUX, R.: Familles anharmoniques de courbes sur une surface gauche. Christiaan Huygens Math. Tydschrift **13**, 275—288.

(5) und (6), (7) ist eindeutig umkehrbar[6]) und deshalb gilt auch[7]): *Jede Dv-Schar ist in einem beliebigen Bezugssystem durch eine* Riccatische *Differentialgleichung darstellbar.*

Zusammenfassend heben wir hervor: *Mit den Dv-Scharen untersucht man zugleich die Kinematik der Quadrikscharen, deren Hüllfläche in eine Regelfläche und einen anderen Bestandteil zerfällt*[8]).

Kurven der Dv-Schar (6) berühren Kurven der Ausgangsschar in den Nullstellen von τ:

$$\tau_{12} + (\tau_{22} - \tau_{11})\, s - \tau_{21}\, s^2 = 0 . \tag{2.8}$$

Man spricht von den *Berührstellen* der beiden Dv-Scharen und erhält: Zwei Dv-Scharen berühren sich auf jeder Erzeugenden in genau zwei Punkten, die zusammenfallen können. Auf der Regelfläche entstehen so die *Berührkurven* der beiden Dv-Scharen.

Insbesondere bilden die Asymptotenlinien eine Dv-Schar, die invariant mit der Regelfläche verbunden ist. Die Kurve

$$\mathfrak{q}(t) = \mathfrak{q}_1(t) + s(t)\, \mathfrak{q}_2(t) \tag{2.9}$$

durchläuft eine Asymptotenlinie, falls

$$\mathfrak{q}'' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}'}$$

ist. Es wird nach (1.8)

$$\begin{cases} \mathfrak{q}' = \bar{s}_1 + s\, \bar{s}_2 + s'\, \mathfrak{q}_2, \\ \mathfrak{q}'' \equiv (\beta + 2s')\, \bar{s}_2 + (\alpha + s'')\, \mathfrak{q}_2 \pmod{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'}, \end{cases} \tag{2.10}$$

und somit *gibt*

$$-2s' = \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})\, s - \beta_{21}\, s^2 \tag{2.11}$$

die Differentialgleichung der Asymptotenlinien auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$.

Zu der Dv-Schar der Asymptotenlinien gehört die *Schmiegquadrik*

$$-2(p_0 p_3 - p_1 p_2) + \beta_{12} p_2^2 + (\beta_{22} - \beta_{11})\, p_2 p_3 - \beta_{21} p_3^2 = 0 . \tag{2.12}$$

Die Nullstellen von β geben die *Schmiegstellen* der Dv-Schar auf der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ an. In ihnen berühren sich Asymptotenlinien und Scharkurven. Die Tangenten an die Scharkurven in den Schmiegstellen bilden zusammen mit der doppelt zählenden Geraden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ das Schnittgebilde der beiden Quadriken (2) und (12). Auf der von $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ erzeugten Regelfläche

[6]) Vgl. hierzu auch Barner, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare. Math. Z. **56**, 409—442 (1952), insbesondere § 3.

[7]) Hiervon geht O. Mayer bei seiner Behandlung der Dv-Scharen aus: Mayer, O.: Sur les surfaces réglées. III, IV, V. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. **26**, 299—308, 626—632 (1940), **27**, 3—11 (1941).

[8]) Inzwischen hat Herr H. Kunle solche Quadrikscharen genauer untersucht, bei denen die Hüllfläche in vier Regelflächen zerfällt. Dabei wird als Bezugssystem das entstehende windschiefe Vierseit verwendet. Kunle, H.: Zur projektiven Kinematik der einparametrigen Quadrikscharen. Diss. Freiburg i. Br. 1953.

bestimmen die Schmiegstellen die *Schmiegkurven. Die Schmiegkurven der Dv-Schar sind durch*

$$\beta = 0 \tag{2.13}$$

gegeben.

Die Fleknodalpunkte einer Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ — in ihnen besitzen die krummlinigen Asymptotenlinien Wendepunkte — bestimmen sich aus

$$\mathfrak{q}'' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'},$$

und dies führt nach (10) mittels (11) auf die quadratische Gleichung

$$\beta_t - 2\alpha = 0. \tag{2.14}$$

(14) *kennzeichnet die Fleknodalkurven der Regelfläche.*

Sind alle $\beta_{ik} = 0$, so fällt die der Betrachtung zugrunde gelegte Dv-Schar mit den Asymptotenlinien zusammen. Die aufgestellten Formeln gehen dann über in die Formeln, die G. BOL der Behandlung der Regelflächen zugrunde legt[9]).

Wir kommen zurück zu der Quadrik (2), der Berührquadrik der Dv-Schar, und betrachten die konkordanten Geraden dieser Quadrik. Bei gegebener Parameterverteilung ist $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ an jeder Stelle eine ganz bestimmte konkordante Gerade. *Zeichnen wir umgekehrt für jeden Wert von t eine konkordante Gerade aus, wobei diese Geradengesamtheit stetig von t abhängen soll, so kann man den Parameter t immer so einrichten, daß* $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ *für jedes t mit dieser Geraden zusammenfällt. Der zugehörige Parameter ist bis auf ganze lineare Substitutionen bestimmt.* Es wird uns dies im folgenden nützlich sein.

Längs der Dv-Schar bildet die konkordante Schar die *konkordante Kongruenz.* Wir wollen ihre Brennflächen und ihre Torsallinien bestimmen und denken uns zu diesem Zweck den Parameter so eingerichtet, daß $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ eine Torse durchläuft. Es sei

$$\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2 \tag{2.15}$$

ein Brennpunkt dieser Torse, d.h. es ist

$$(\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2)' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2}.$$

Wegen

$$\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2 \equiv (\alpha_{11} + s\,\alpha_{21})\,\mathfrak{q}_1 + (\alpha_{12} + s\,\alpha_{22})\,\mathfrak{q}_2 \pmod{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2}$$

führt dies auf

$$\alpha_{11} + s\,\alpha_{21} = 0,$$
$$\alpha_{12} + s\,\alpha_{22} = 0.$$

Ist dieses System für s lösbar, d.h. gilt

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0, \tag{2.16}$$

[9]) BOL, G.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen. Math. Z. 5[illegible] 791—809 (1950).

so berechnen sich die Brennpunkte aus der quadratischen Gleichung

$$\alpha \equiv \alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})\, s - \alpha_{21}\, s^2 = 0. \tag{2.17}$$

Gehen wir mittels (1.10) und (1.14) zu einem beliebigen Parameter über, so finden wir die Brennflächen der konkordanten Kongruenz nach Elimination von A aus

$$\begin{cases} \mathfrak{s}_1^* + s\,\mathfrak{s}_2^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}[\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2 + A(\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2)], \\ \alpha^* = \varphi^{-2}(\alpha - A\,\beta) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Dies führt auf

$$\mathfrak{y}(t, s) = \alpha(\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2) + \beta(\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2). \tag{2.19}$$

Haben $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ keine Wurzel gemeinsam, so werden die Brennflächen der konkordanten Kongruenz erzeugt von den Kurven dritter Ordnung (19). Je nachdem, ob die beiden Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ eine oder zwei Wurzeln gemeinsam haben, zerfällt diese erzeugende Kurve in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder in zwei Geraden [vgl. hierzu 4b)].

Betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall. Jede der beiden Brennflächen der konkordanten Kongruenz wird erzeugt von der Kurve (19). Die Punkte dieser Kurve sind also paarweise einander zugeordnet — es entstehen die Paare einer Involution, die durch das Büschel quadratischer Gleichungen

$$\alpha - A\,\beta = 0 \tag{2.20}$$

bestimmt sind. Diese Involution, die zunächst auf den Kurven dritter Ordnung (19) erklärt ist, überträgt sich mittels der Geraden der Transversalschar auf jede konkordante Gerade, insbesondere also auch auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$.

Mit einer Dv-Schar ist eine Involution lokal verknüpft, die durch die Wurzeln von (20) *erzeugt wird.* Wir nennen die Doppelpunkte dieser Involution *Spiegelpunkte* der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$. Die Transversalgeraden durch die Spiegelpunkte heißen *Spiegelgeraden.* Und so können wir sagen: *Die Brennpunkte der konkordanten Kongruenz auf einer konkordanten Geraden trennen die Schnittpunkte mit den Spiegelgeraden harmonisch.*

Die einparametrige Schar der Berührquadriken hüllt außer der Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ noch die von den Kurven dritter Ordnung (19) gebildete Fläche ein. Denn die konkordanten Geraden jeder Berührquadrik berühren diese Fläche. Die Kongruenz der Transversalgeraden hat also außer der Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ die von den Kurven dritter Ordnung (19) erzeugte Fläche zur Brennfläche. Die Tangentenebenen an diese Fläche sind demnach Schmiegebenen an die Torsallinien auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$. Dies sind aber die Scharkurven der Doppelverhältnisschar. Da nun die Tangentenebene an die Brennfläche (19) mit der Tangentenebene an die Berührquadrik zusammenfällt, kann man diese sofort in der Form

$$\mathfrak{Y}(t, s) = \alpha(\mathfrak{Q}_1 + s\,\mathfrak{Q}_2) + \beta(\mathfrak{S}_1 + s\,\mathfrak{S}_2) \tag{2.21}$$

angeben. Denn (19) und (21) sind polar bezüglich der Berührquadrik. *Die Schmiegebene an eine Scharkurve* (1.2) *ist durch* (21) *bestimmt. Sie berührt*

die Berührquadrik (2) *in dem zugehörigen Punkt* (19). Man kann natürlich (21) auch direkt durch Rechnung bestätigen.

Dual entsprechend gilt: $\mathfrak{y}$ *ist der Ort der Kehlpunkte der Streifen, die die Tangentenebenen an die Regelfläche längs der Kurven der konjugierten Schar bilden.*

3. Die Kurven einer Doppelverhältnisschar bilden die Erzeugenden der Regelfläche projektiv aufeinander ab. Wir denken uns in dieser Weise die Erzeugenden der Regelfläche durch die Kurven der Doppelverhältnisschar auf ein binäres Gebiet abgebildet, das wir uns nach HESSE als einen Kegelschnitt einer Hilfsebene vorstellen. Ein Punkt des Kegelschnitts repräsentiert dann eine Kurve der Schar. Ein Punkt der Hilfsebene, der nicht auf dem Kegelschnitt liegt, definiert durch seine polare Gerade ein Punktepaar des Kegelschnitts, d.h. auf der Regelfläche wird so ein Paar von Scharkurven festgelegt.

Denkt man sich die Hilfsebene auf die Basisvektoren

$$\mathfrak{x},\quad \mathfrak{z},\quad \bar{\mathfrak{x}} \tag{3.1}$$

bezogen und einen Punkt der Ebene also in der Form

$$\mathfrak{p} = p_0\,\mathfrak{x} + p_1\,\mathfrak{z} + p_2\,\bar{\mathfrak{x}} \tag{3.2}$$

dargestellt, so können wir den Kegelschnitt uns durch

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle \equiv -\,p_0 p_2 + p_1^2 = 0 \tag{3.3}$$

gegeben denken. Die Parameterdarstellung des Kegelschnitts lautet dann etwa

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{x} + s\,\mathfrak{z} + s^2\,\bar{\mathfrak{x}}. \tag{3.4}$$

Die Polare des Punktes (2) schneidet aus dem Kegelschnitt das Punktepaar

$$p_2 - 2s\,p_1 + s^2 p_0 = 0 \tag{3.5}$$

aus, das also dem Punkt $\mathfrak{p}$ in (2) umkehrbar eindeutig zugeordnet ist. In den Anwendungen schreiben wir die quadratischen Ausdrücke in s meist in der Form

$$\lambda \equiv \lambda_{12} + (\lambda_{22} - \lambda_{11})\,s - \lambda_{21}\,s^2. \tag{3.6}$$

Der Vergleich mit (2) und (5) lehrt, daß (6) umkehrbar eindeutig auf den Punkt

$$\mathfrak{l} = -\,\lambda_{21}\,\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{11})\,\mathfrak{z} + \lambda_{12}\,\bar{\mathfrak{x}} \tag{3.7}$$

der Hilfsebene abgebildet ist.

Eine Kurve der Regelfläche, die von einer Scharkurve verschieden ist, ordnet sich einem bewegten Punkt in dem binären Gebiet zu, dessen Bewegung abhängt von dem Parameter t auf der Regelfläche. Zu den Kurvenpaaren der Regelfläche gehören umkehrbar eindeutig die Kurven der Hilfsebene.

Ist uns nun neben der Ausgangsschar eine weitere Doppelverhältnisschar auf der Regelfläche gegeben, so bestimmt diese eine *projektive Bewegung*[10]) in dem binären Gebiet, d.h. in der Hilfsebene eine projektive Bewegung des Kegelschnitts (3) in sich.

Betrachten wir den Kegelschnitt (3) der Hilfsebene als den *absoluten Kegelschnitt einer hyperbolischen Geometrie*, so überträgt sich die projektive Bewegung des Kegelschnitts in sich auf eine *hyperbolische Bewegung* der Hilfsebene — und umgekehrt. Wir sprechen deshalb von der *hyperbolischen Bildebene* und sagen, die hyperbolische Bewegung sei *das Bild* der Dv-Schar in der Ausgangsschar. Umgekehrt hat z.B. eine Kurve der festen oder der bewegten hyperbolischen Ebene zum *Urbild* jeweils ein eindeutig bestimmtes Kurvenpaar auf der Regelfläche.

Die *krummlinigen Asymptotenlinien* einer Regelfläche bilden eine Doppelverhältnisschar. Wir wollen diese jetzt als Ausgangsschar verwenden. Wenn nicht ausdrücklich anders hervorgehoben, denken wir uns im folgenden die Erzeugenden der Regelfläche durch die zweite Schar der Asymptotenlinien projektiv aufeinander und auf den Kegelschnitt der Hilfsebene abgebildet. Die betrachtete Dv-Schar definiert dann in der Hilfsebene eine hyperbolische Bewegung. Diese Bewegung betrachten wir als das Bild der Dv-Schar (1.2) mit (1.8) (in der Schar der Asymptotenlinien). Diese hyperbolische Bewegung soll jetzt analytisch erfaßt werden.

Wir denken uns hierzu das durch (1) gegebene Bezugssystem so bewegt, daß die Basisvektoren den Ableitungsgleichungen

$$\text{(3.8)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}' = \beta_{11}\,\mathfrak{x} + \frac{1}{2}\beta_{12}\,\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{z}' = \beta_{21}\,\mathfrak{x} \qquad\qquad + \beta_{12}\,\overline{\mathfrak{x}}, \\ \overline{\mathfrak{x}}' = \qquad\quad \frac{1}{2}\beta_{21}\,\mathfrak{z} + \beta_{22}\,\overline{\mathfrak{x}} \end{cases}$$

genügen. Ein Punkt

$$\text{(3.9)} \qquad \mathfrak{p} = \boldsymbol{p}_0(t)\,\mathfrak{x}(t) + \boldsymbol{p}_1(t)\,\mathfrak{z}(t) + \boldsymbol{p}_2(t)\,\overline{\mathfrak{x}}(t)$$

verhält sich in dieser Bewegung stationär, falls

$$\mathfrak{p}' - \varrho\,\mathfrak{p} = 0$$

ist. Dies führt ausgeschrieben auf die *Stationaritätsbedingung*:

$$\text{(3.10)} \qquad \begin{cases} -\boldsymbol{p}_0' + \varrho\,\boldsymbol{p}_0 = \beta_{11}\boldsymbol{p}_0 + \beta_{21}\boldsymbol{p}_1, \\ -\boldsymbol{p}_1' + \varrho\,\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{2}\beta_{12}\boldsymbol{p}_0 \qquad + \frac{1}{2}\beta_{21}\boldsymbol{p}_2, \\ -\boldsymbol{p}_2' + \varrho\,\boldsymbol{p}_2 = \qquad\quad \beta_{12}\boldsymbol{p}_1 + \beta_{22}\boldsymbol{p}_2. \end{cases}$$

Hiermit bestätigt man sofort

$$\langle \mathfrak{p}(t), \mathfrak{p}(t) \rangle' = 0.$$

(8) läßt also den absoluten Kegelschnitt fest und definiert somit tatsächlich eine hyperbolische Bewegung der Hilfsebene.

[10]) Der Begriff „Bewegung" tritt in dieser Arbeit nur in kinematischem Sinne auf.

Wann ist der Punkt

$$\mathfrak{k}(t,s) = \mathfrak{x}(t) + s(t)\,\mathfrak{z}(t) + s^2(t)\,\overline{\mathfrak{x}}(t) \tag{3.11}$$

des Kegelschnitts (3) in der Bewegung (8) fest? Es ist

$$\mathfrak{k}_t\big(t, s(t)\big) = \tfrac{1}{2}\{2s' + \beta\}\,(\mathfrak{z} + 2s\,\overline{\mathfrak{x}}) + (\beta_{11} + \beta_{21}\,s)\,\mathfrak{k}.$$

Für die ortsfesten Punkte gilt also die RICCATIsche Differentialgleichung

$$-2s' = \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})\,s - \beta_{21}\,s^2.$$

Im Vergleich mit (2.11) steckt darin der Beweis für die Behauptung.

Wir fassen zusammen: *Denken wir uns die Erzeugenden einer Regelfläche durch ihre krummlinigen Asymptotenlinien aufeinander abgebildet, so bestimmt eine Doppelverhältnisschar eine projektive Bewegung in diesem binären Gebiet. Deutet man sich dieses nach* HESSE *als einen Kegelschnitt einer Hilfsebene, so induziert die projektive Bewegung auf dem Kegelschnitt eine hyperbolische Bewegung in der Hilfsebene. Die zu der Doppelverhältnisschar* (1.2) *mit* (1.8) *gehörende hyperbolische Bewegung ist durch* (8) *gekennzeichnet.*

Hierin liegt insbesondere die Aussage: *Die Eigenschaften der Doppelverhältnisschar* (1.2) *mit* (1.8), *die invariant sind gegenüber asymptotenlinienerhaltenden Abbildungen der Regelfläche, sind gekennzeichnet durch die Eigenschaften der zugehörigen hyperbolischen Bewegung* (8) *der Hilfsebene.*

Sprechen wir also kurz von den Eigenschaften der hyperbolischen Bewegungen der Ebene. Sie werden — wie die euklidischen Bewegungen — beschrieben, indem eine Kurve des bewegten Systems (die Gangpolbahn) über eine Kurve des festen Systems (die Rastpolbahn) hyperbolisch abrollt ohne zu gleiten. Der Ort der momentanen Fixpunkte bestimmt in beiden Systemen diese Kurven.

Der Punkt

$$\mathfrak{b} = -\beta_{21}\,\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})\,\mathfrak{z} + \beta_{12}\,\overline{\mathfrak{x}} \tag{3.12}$$

der Hilfsebene ist nach (2.13), (6) und (7) das Bild der Schmiegstellen. Es gilt

$$\mathfrak{b}' = -\beta'_{21}\,\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11})\,\mathfrak{z} + \beta'_{12}\,\overline{\mathfrak{x}},$$

und demnach ist $\mathfrak{b}$ der momentane Drehpol der Bewegung; denn dieser Punkt hat im festen wie im bewegten System die gleiche „Geschwindigkeit". *Der Ort der Schmiegstellen definiert im hyperbolischen Bild den Ort der momentanen Fixpunkte im bewegten und festen System.*

Gibt man umgekehrt in der Ebene zwei hyperbolisch längentreu aufeinander bezogene Kurven vor, so gibt es dazu genau eine hyperbolische Bewegung, die diese Kurven als Orte der momentanen Fixpunkte im festen bzw. bewegten System besitzt. Man kann also eine Dv-Schar invariant durch die Angabe der hyperbolischen Krümmungen der beiden Kurven eindeutig festlegen, die dem Schmiegkurvenpaar in bezug auf die Schar der Asymptotenlinien bzw. in bezug auf die Dv-Schar in der hyperbolischen Ebene entsprechen.

Wir sahen bereits, daß sich bei einer Dv-Schar die Eigenschaften, die gegenüber asymptotenlinienerhaltenden Abbildungen invariant sind, in der zugehörigen hyperbolischen Bewegung (8) ausdrücken. Denken wir uns jedoch eine Dv-Schar auf einer konkret vorgegebenen Regelfläche, so lassen sich auch noch andere Größen in dem hyperbolischen Bild deuten.

Die Brennpunkte der konkordanten Kongruenz auf einer bestimmten konkordanten Geraden $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ übertragen sich mittels der hindurchgehenden Transversalgeraden auf $(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$, d. h. in das binäre Gebiet, und sind nach (2.17) durch

$$\alpha \equiv \alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})\, s - \alpha_{21} s^2 = 0$$

bestimmt. Ihr hyperbolisches Bild ist demnach der Punkt

$$(3.13)\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = -\alpha_{21}\, \mathfrak{x} - \\ \quad -\tfrac{1}{2}(\alpha_{22} - \alpha_{11})\, \mathfrak{d} + \alpha_{12}\, \bar{\mathfrak{x}}. \end{cases}$$

Gehen wir zu einer anderen Parameterverteilung und damit zu einer anderen konkordanten Geraden $(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)$ über, so gehört hierzu der Punkt

$$\mathfrak{a}^* = \varphi^{-2}(\mathfrak{a} - A\, \mathfrak{b}).$$

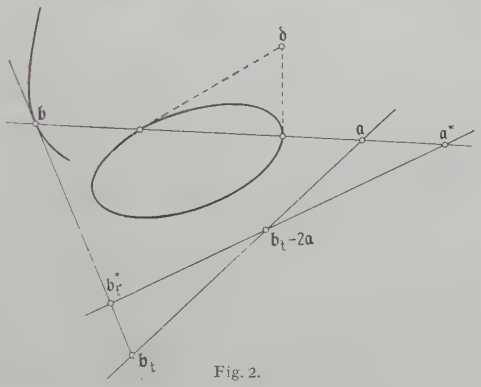

Fig. 2.

In der Hilfsebene ist also an jeder Stelle eine Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ durch den momentanen Fixpunkt der Bewegung $\mathfrak{b}$ definiert, die die lokal bestimmte Involution auf der Erzeugenden kennzeichnet. Die Paare der Involution werden von den Polaren der Punkte der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ aus dem Kegelschnitt ausgeschnitten. Die Doppelpunkte der Involution — wir nannten sie im Urbild die Spiegelpunkte der Erzeugenden — werden von der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ auf dem Kegelschnitt bestimmt. Ihr Bildpunkt ist also der Pol der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$.

Bei Parametertransformation zeigt $\mathfrak{b}$ das Verhalten

$$(3.14)\qquad \mathfrak{b}^* = \varphi^{-1}\, \mathfrak{b},$$

und also ist

$$(3.15)\qquad \frac{d\,\mathfrak{b}^*}{dt^*} = \varphi^{-2}(\mathfrak{b}' - 2A\, \mathfrak{b}).$$

Der Vektor

$$(3.16)\qquad \frac{d\,\mathfrak{b}^*}{dt^*} - 2\,\mathfrak{a}^* = \varphi^{-2}(\mathfrak{b}' - 2\,\mathfrak{a})$$

ist demnach halbinvariant vom Gewicht 2. Er stellt nach (2.14) das Bild der Fleknodalpunkte der Erzeugenden dar.

Die Figur 2 veranschaulicht die in das hyperbolische Bild eingehenden geometrischen Größen. Man kann daran unmittelbar eine Reihe von invarianten Eigenschaften einer Dv-Schar ablesen. Wir gehen darauf nur an

Beispielen in dem folgenden II. Teil dieser Arbeit ein. Insbesondere vergleiche man Abschnitt 9, S. 91, wo die Frage behandelt wird, inwiefern eine Dv-Schar durch ihr hyperbolisches Bild festgelegt ist.

II. Geometrische Ergebnisse und ergänzende Bemerkungen.

4. a) Zwischen den beiden Produktbildungen in der hyperbolischen Ebene, dem „Skalarprodukt"

$$\langle \mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{p}} \rangle = p_0 \overline{p}_2 - 2 p_1 \overline{p}_1 + p_2 \overline{p}_0 \tag{4.1}$$

und dem „Vektorprodukt"

$$\mathfrak{p} \wedge \overline{\mathfrak{p}} = \{p_0 \overline{p}_1 - p_1 \overline{p}_0,\ \tfrac{1}{2}(p_0 \overline{p}_2 - p_2 \overline{p}_0),\ p_1 \overline{p}_2 - p_2 \overline{p}_1\}, \tag{4.2}$$

bestehen — wie im euklidischen R_3 — gewisse Identitäten, die manchmal nützlich sind.

Zunächst gilt für die Basisvektoren die Produkttabelle

(4.3)

$\langle , \rangle$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{z}$	$\overline{\mathfrak{x}}$
$\mathfrak{x}$	0	0	1
$\mathfrak{z}$	0	−2	0
$\overline{\mathfrak{x}}$	1	0	0

bzw.

(4.4)

$\wedge$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{z}$	$\overline{\mathfrak{x}}$
$\mathfrak{x}$	0	$\mathfrak{x}$	$\frac{1}{2}\mathfrak{z}$
$\mathfrak{z}$	$-\mathfrak{x}$	0	$\overline{\mathfrak{x}}$
$\overline{\mathfrak{x}}$	$-\frac{1}{2}\mathfrak{z}$	$-\overline{\mathfrak{x}}$	0

Ferner ist

$$2\,\mathfrak{p} \wedge (\mathfrak{q} \wedge \mathfrak{r}) = -\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle \mathfrak{r} + \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{r} \rangle \mathfrak{q}, \tag{4.5}$$

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{r} \rangle = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \tag{4.6}$$

und daraus folgt insbesondere

$$2\langle \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{s} \rangle = \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{r} \rangle \langle \mathfrak{q}, \mathfrak{s} \rangle - \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{s} \rangle \langle \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \rangle. \tag{4.7}$$

Zum Beweis genügt es, diese Relationen an Hand von (3) und (4) für die Basisvektoren zu bestätigen.

Das Produkt $\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$ definiert den zu der Geraden $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ polaren Punkt. Die Gerade $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ berührt also genau dann den absoluten Kegelschnitt, wenn

$$\langle \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}, \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q} \rangle = 0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q} \neq 0 \tag{4.8}$$

gilt. Das Zusammenfallen zweier Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ wird durch

$$\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q} = 0 \tag{4.9}$$

gekennzeichnet.

$\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$ ist als Pol der Geraden $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ nur bis auf die Normierung festgelegt. Die Definition (2) ist so gewählt, daß aus

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle = 2\varepsilon_1, \quad \langle \mathfrak{q}, \mathfrak{q} \rangle = 2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \tag{4.10}$$

folgt

$$\langle \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}, \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q} \rangle = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2. \tag{4.11}$$

b) Als Anwendung berechnen wir $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle$ bzw. $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}$. Gehen wir mit (3.12) bzw. (3.13) in (1) bzw. (2) ein, so wird

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle = -\beta_{21}\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \beta_{12}\alpha_{21}, \tag{4.12}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a} = {} & \tfrac{1}{2}[\beta_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{21}(\beta_{22} - \beta_{11})]\,\mathfrak{x} + \tfrac{1}{2}[\beta_{12}\alpha_{21} - \alpha_{12}\beta_{21}]\,\mathfrak{z} + \\ & + \tfrac{1}{2}[\beta_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})]\,\bar{\mathfrak{x}}. \end{aligned} \right. \tag{4.13}$$

Zu $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}$ gehört ein bestimmter quadratischer Ausdruck in s, den wir mit $\beta \wedge \alpha$ bezeichnen. Der Vergleich mit (3.6), (3.7) liefert

$$\left\{ \begin{aligned} \beta \wedge \alpha = {} & \tfrac{1}{2}[\beta_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})] - [\beta_{12}\alpha_{21} - \alpha_{12}\beta_{21}]\,s + \\ & + \tfrac{1}{2}[\beta_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{21}(\beta_{22} - \beta_{11})]\,s^2. \end{aligned} \right. \tag{4.14}$$

Die Nullstellen von (14) *sind die Schnittpunkte der Geraden* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ *mit dem absoluten Kegelschnitt. Dieses Punktepaar ist durch* (13) *gekennzeichnet.*

Diese Betrachtung ist zunächst von der Bedeutung von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ unabhängig. Beachten wir aber jetzt, daß die Punkte der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ die Paare der ausgezeichneten Involution definieren, so gilt: *Die Spiegelpunkte auf einer Erzeugenden berechnen sich aus*

$$\delta \equiv \beta \wedge \alpha = 0$$

[*vgl.* (14)], *ihr hyperbolisches Bild ist*

$$\mathfrak{d} \equiv \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}$$

[*vgl.* (13)].

Die Involution entartet, d.h. die Spiegelpunkte fallen zusammen genau dann, wenn die beiden quadratischen Gleichungen $\beta = 0$, $\alpha = 0$ eine Wurzel gemein haben. Hierfür ist

$$\langle \mathfrak{d}, \mathfrak{d} \rangle = 0, \quad \mathfrak{d} \neq 0 \tag{4.15}$$

kennzeichnend. Die Spiegelpunkte sind unbestimmt, falls

$$\mathfrak{d} = 0, \tag{4.16}$$

und dies ist gleichbedeutend mit

$$\alpha = \Phi\beta, \qquad \mathfrak{a} = \Phi\mathfrak{b}. \tag{4.17}$$

In diesem Fall sind die Wurzeln von $\alpha = 0$, $\beta = 0$ dieselben.

Es sei $s = s_0$ eine gemeinsame Wurzel von $\beta = 0$ und $\alpha = 0$. Dann ist jeder Punkt der Geraden

$$(q_1 + s_0 q_2,\ \bar{q}_1 + s_0 \bar{q}_2) \tag{4.18}$$

Brennpunkt der konkordanten Kongruenz. Denn mit $s = s_0$ ist (2.18) für jeden Wert von A erfüllt.

Der Ort der Brennpunkte der konkordanten Kongruenz für einen bestimmten Wert von t zerfällt genau dann in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wenn (15); *er zerfällt in zwei Geraden, wenn* (16) *bzw.* (17) *gilt.*

Nach (2.21) ist für eine gemeinsame Wurzel von $\beta = 0$ und $\alpha = 0$ die Schmiegebene der Scharkurve unbestimmt. Die Scharkurve hat an einer solchen Stelle also einen Wendepunkt — und nur an einer solchen Stelle. *Die Tangente an eine Scharkurve besteht genau dann aus Brennpunkten der konkordanten Kongruenz, wenn diese Tangente Wendetangente der zugehörigen Scharkurve ist.* Es kennzeichnet also (15), daß *eine* der Scharkurven entlang der betrachteten Erzeugenden einen Wendepunkt, (16), daß *zwei* der Scharkurven Wendepunkte besitzen.

5. a) Die charakteristische Kurve zweier benachbarter Berührquadriken besteht neben der Erzeugenden der Regelfläche im allgemeinen aus der Kurve dritter Ordnung (2.19). Diese zerfällt, falls (4.15) gilt, in die Gerade (4.18) und den Kegelschnitt (2.19). Dieser Kegelschnitt trägt dann neben $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ auch die Brennpunkte der Transversalkongruenz. Gilt (4.16), so sind die Brennflächen der konkordanten Kongruenz Regelflächen, die charakteristische Kurve der Schar der Berührquadriken muß in ein Vierseit zerfallen. Die zweite Brennfläche der Transversalkongruenz ist dann ebenfalls Regelfläche. Sie wird erzeugt von der konkordanten Gerade

$$(\mathfrak{s}_1 + \Phi\,\mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{s}_2 + \Phi\,\mathfrak{q}_2). \tag{5.1}$$

Mit (4.17) bestätigt man z. B., daß die Gerade $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)$ die Regelfläche (1) berührt. $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)$ ist aber vor anderen Tangenten an Scharkurven nicht ausgezeichnet.

Es gilt aber auch umgekehrt: *Ist die charakteristische Kurve einer einparametrigen Quadrikschar ein Vierseit, so liegt die betrachtete Figur vor. Die Erzeugenden der Quadrik definieren auf jeder der vier Regelflächen eine Dv-Schar, die diese Erzeugenden zu Tangenten haben. Diese Dv-Scharen besitzen die Eigenschaft* (4.16).

Hier sind also die vier in der Figur auftretenden Regelflächen völlig gleichberechtigt. Konkordante Kongruenz (wie auch Transversalkongruenz) sind W-Strahlsysteme. Es entsprechen sich ja die geradlinigen Erzeugenden der Brennflächen. Zwei „gegenüberliegende" Regelflächen in dieser Figur heißen deshalb *W-transformierte Regelflächen.* Hat man umgekehrt zwei W-transformierte Regelflächen, so gehört auch zu ihnen die beschriebene Figur: Die Torsallinien bilden auf jeder der Regelflächen eine Dv-Schar mit der Eigenschaft (4.16).

Man nennt eine Dv-Schar mit (4.16) auch *schichtbildend.* Die Schmiegebenen der Scharkurven bilden nämlich nach (2.21) ein Ebenenbüschel mit der zugehörenden Gerade (1) der zweiten Brennfläche der Transversalkongruenz als Büschelachse.

b) Zu einer schichtbildenden Dv-Schar gehört somit ein ausgezeichneter Parameter — man kann die Parameterverteilung ja immer so einrichten, daß eine beliebig vorgegebene konkordante Gerade mit $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ zusammenfällt. Wann beschreibt $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ die zweite Brennfläche der Transversalkongruenz einer schichtbildenden Dv-Schar? Es ist

$$(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*) = \varphi^{-1}(\mathfrak{s}_1 + A\,\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_2 + A\,\mathfrak{q}_2),$$

und der Vergleich mit (1) lehrt, daß man A aus

$$A = \Phi \tag{5.2}$$

zu bestimmen hat. Dann verschwindet aber

$$\mathfrak{a}^* = \varphi^{-2}(\mathfrak{a} - A\,\mathfrak{b}) = \varphi^{-2}(\mathfrak{a} - \Phi\,\mathfrak{b}).$$

Alle Parameter mit dieser Eigenschaft in einer schichtbildenden Dv-Schar hängen durch ganze lineare Substitutionen zusammen.

Bei geeigneter Parameterverteilung ist eine schichtbildende Dv-Schar durch

$$\mathfrak{a} = 0 \tag{5.3}$$

gekennzeichnet. Die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ beschreibt bei dieser Parameterverteilung die zweite Brennfläche der Transversalkongruenz.

c) Im Geradenraum sind die schichtbildenden Dv-Scharen durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet: *Es existiert eine konkordante Gerade — es sei dies $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ —, so daß zwei benachbarte Geraden $\big((\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2), (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)\big)$ des Geradenraumes sich schneiden.*

Es ist nach den Ableitungsgleichungen (1.8)

$$\left\{\begin{aligned}[\Psi(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)]' = {} & (\alpha_{11} + \Psi)(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_2) + (\alpha_{22} + \Psi)(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{q}_2) + \\ & + \Psi'(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + \alpha_{12}(\mathfrak{q}_2, \mathfrak{s}_2) + \alpha_{21}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{q}_1),\end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

und das Schneiden zweier benachbarter Geraden $\big((\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2), (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)\big)$ ist durch

$$[\Psi(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)]' \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2),\ (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)} \tag{5.5}$$

gekennzeichnet. Dies führt auf

$$\mathfrak{a} = 0, \qquad \alpha_{11} + \alpha_{22} + 2\Psi = 0, \tag{5.6}$$

und die so ausgezeichnete konkordante Gerade ist also die Erzeugende der zweiten Brennfläche der Transversalkongruenz.

Umgekehrt kennzeichnet aber die Bedingung (6) auch ein beliebiges Regelflächenpaar $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$, $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ als W-transformiert. Man gehe zum Beweis von der Dv-Schar etwa auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ aus, deren Tangenten die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ treffen. Man kann dann wie oben weiterschließen.

d) Hier sind noch zwei wichtige Sonderfälle zu beachten. Kann der Schnittpunkt benachbarter Geraden des R_5 $\big((\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2), (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)\big)$ fest sein? Nach (4) muß hierzu neben (6) auch noch

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = -2\Psi = \text{const} \tag{5.7}$$

sein. Es existiert dann ein fester Komplex

$$\Psi(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2), \tag{5.8}$$

dem die Gerade $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)$ angehört. Da diese Gerade vor anderen Schartangenten nicht ausgezeichnet ist, und die Bedingungen (6), (7) nicht von der speziellen Darstellung der Dv-Schar abhängen, gehören *alle* Scharkurven dem festen Komplex an.

Ist bei der speziellen Parameterverteilung, die zu einer schichtbildenden Dv-Schar gehört, außer (6) *auch noch* (7) *erfüllt, so gehören die Scharkurven alle dem festen Komplex* (8) *an.* Aus Symmetriegründen gilt dasselbe auch für die Torsallinien auf der gegenüberliegenden Brennfläche $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$.

Man findet nach (1.8)

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_1'', \mathfrak{q}_1''') = \beta_{12}^2 \alpha_{22} (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{q}_2), \tag{5.9}$$

und also kennzeichnet

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0 \tag{5.10}$$

$\mathfrak{q}_1$ als ebene Kurve. Da $\mathfrak{q}_1$ vor anderen Scharkurven nicht ausgezeichnet ist und die Bedingung (10) nicht von der Wahl der Basisvektoren $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ abhängt, folgt: *Ist eine Kurve einer schichtbildenden Dv-Schar eben, aber keine Gerade, so haben auch alle andern Scharkurven diese Eigenschaft. Es gilt* (6) *mit* (10).

Als Gerade wird $\mathfrak{q}_1$ durch

$$\beta_{12} = 0 \tag{5.11}$$

gekennzeichnet. Das hyperbolische Bild von $\mathfrak{q}_1$, der Punkt $\mathfrak{x}$, ist genau in diesem Fall fest. *Ist eine Scharkurve einer schichtbildenden Dv-Schar eine Asymptotenlinie, so ist sie eine Gerade und also Fleknodalkurve auf der Regelfläche.*

In der hyperbolischen Ebene bedeutet dies, daß sich $\mathfrak{b}$ auf einer Gerade bewegt, die den absoluten Kegelschnitt berührt. Dann muß sich auch $\mathfrak{b}'$, das Bild der Fleknodalpunkte, auf dieser Gerade bewegen.

Eine Gerade der Regelfläche braucht aber nicht notwendig Scharkurve jeder schichtbildenden Dv-Schar zu sein. Es kann ja im hyperbolischen Bild $\mathfrak{b}'$ eine den absoluten Kegelschnitt berührende Gerade der festen Ebene durchlaufen, ohne daß dasselbe auch für $\mathfrak{b}$ gelten müßte.

e) Wir haben soeben schichtbildende Dv-Scharen betrachtet, deren Scharkurven alle ein und demselben linearen Komplex angehörten. Jetzt fragen wir nach den Stellen auf einer Erzeugenden, in denen die hindurchgehende Scharkurve einen Komplexpunkt besitzt.

Betrachten wir etwa die Kurve $\mathfrak{q}_1$. Der Schmiegkomplex dieser Kurve im Geradenraum wird aufgespannt von den Punkten

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1), \quad (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)', \quad (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)'', \quad (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)''', \quad (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)^{(4)}.$$

Nach den Ableitungsgleichungen (1.8), (3) geht dieses Punktsystem über in

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{q}_1, \bar{\mathfrak{s}}_1),\\ &(\mathfrak{q}_1, \bar{\mathfrak{s}}_2),\\ &(\bar{\mathfrak{s}}_1, \bar{\mathfrak{s}}_2) + \alpha_{22}(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2),\\ &2(\bar{\mathfrak{s}}_1, \mathfrak{q}_2) + L(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2),\\ &2\beta_{12}(\bar{\mathfrak{s}}_2, \mathfrak{q}_2) + (M - L\beta_{11})(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2),\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$L = (\ln \alpha_{22})', \qquad M = L' - \tfrac{1}{2}L^2, \qquad N = 2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})L - ML + 2M'$$

gesetzt ist. Der Schmiegkomplex der Kurve $\mathfrak{q}_1$ wird repräsentiert von dem hierzu polaren Punkt

$$(5.12)\quad \mathfrak{w} = 2\beta_{12}(\bar{\mathfrak{s}}_1, \bar{\mathfrak{s}}_2) - 2\alpha_{22}\beta_{12}(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + L\beta_{12}(\mathfrak{q}_1, \bar{\mathfrak{s}}_2) + (L\beta_{11} - M)(\mathfrak{q}_1, \bar{\mathfrak{s}}_1).$$

Wann ist der Schmiegkomplex stationär? Dies führt auf die Bedingung

$$(5.13)\quad N\beta_{12} - 2M\beta'_{12} + 2L \cdot \tfrac{1}{2}\left(\beta_{12}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) - \beta'_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})\right) = 0.$$

Betrachten wir nun den Punkt

$$(5.14)\quad \mathfrak{m} = N\mathfrak{b} - 2M\mathfrak{b}' + 2L(\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}')$$

der hyperbolischen Ebene. Er ist invariant mit der schichtbildenden Dv-Schar verknüpft. Der Vektor $\mathfrak{m}$ wird aufgespannt von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$ mit Koeffizienten, in die nur die invarianten Größen (1.28) und ihre Ableitungen eingehen. Der Punkt $\mathfrak{x}$, das hyperbolische Bild von $\mathfrak{q}_1$, ist genau dann zu $\mathfrak{m}$ polar, falls (13) gilt.

Dieser Zusammenhang zwischen (13) und (14) und die Invarianz von (14) lehrt dann: *Auf jeder Erzeugenden gibt es zwei Stellen, in denen die hindurchgehende Scharkurve einer schichtbildenden Dv-Schar einen Komplexpunkt besitzt. Das hyperbolische Bild dieses Punktepaares wird im zugeordneten Bezugssystem* [*es gilt* (3)] *durch* $\mathfrak{m}$ *in* (14) *gegeben.*

Hiermit kann man leicht die Frage beantworten, wann sämtliche Scharkurven längs einer Erzeugenden einen Komplexpunkt besitzen. Hierzu muß $\mathfrak{m}$ der Nullvektor sein. Sind die Vektoren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$ linear unabhängig, so zieht das Verschwinden von $\mathfrak{m}$ das Verschwinden des Koeffizienten von $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$, d.h.

$$(5.15)\quad L = 0,$$

nach sich. Daraus folgt aber dann das Verschwinden der anderen Koeffizienten. (15) ist mit (7) gleichbedeutend.

Somit: *Fallen die Schmiegstellen einer schichtbildenden Dv-Schar nicht zusammen und sind sie von den Fleknodalpunkten verschieden und gibt es auf einer Erzeugenden drei Stellen, in denen Scharkurven Komplexpunkte besitzen, so besitzen alle Scharkurven auf dieser Erzeugenden einen Komplexpunkt, der Schmiegkomplex aller Scharkurven ist derselbe.* Da die Fleknodalpunkte in

unserem Bezugssystem von $\mathfrak{b}'$ dargestellt werden, so bedeutet die zuerst gemachte Voraussetzung, daß die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ existiert und den absoluten Kegelschnitt nicht berührt. Dann sind aber $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$ linear unabhängig.

Berührt die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ für jedes t den absoluten Kegelschnitt, so gibt es [vgl. d)] eine feste Gerade, die alle Erzeugenden der Regelfläche trifft. Wir können deshalb einfacher so formulieren: *Kommen unter den Scharkurven einer schichtbildenden Dv-Schar keine Gerade aber drei Komplexkurven vor, so gehören alle Scharkurven ein und demselben linearen Komplex an, d.h. es gilt* (7).

Dagegen kann auf einer Regelfläche in einem speziellen linearen Komplex durchaus eine aus Komplexkurven bestehende schichtbildende Dv-Schar existieren, deren Kurven nicht in demselben Komplex liegen, falls die Leitlinie des speziellen Komplexes selbst Scharkurve ist.

Auf einer Kongruenzregelfläche, deren Leitlinien Scharkurven einer schichtbildenden Dv-Schar sind, sind solche Dv-Scharen aus Komplexkurven verschiedener Komplexe z.B. neben (7) durch

$$\mathfrak{b}' = \frac{N}{2M}\,\mathfrak{b} \tag{5.16}$$

gekennzeichnet.

f) Ein weiterer Sonderfall unter den schichtbildenden Dv-Scharen ist der, daß die Brennflächen der konkordanten Kongruenz zusammenfallen. Es gilt dann neben (4.17) auch noch

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = 0.$$

Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = 0. \tag{5.17}$$

Denn zwei Punkte des Kegelschnittes sind nur dann polar zueinander, wenn sie zusammenfallen.

Weiter gilt aber: *Fallen die Brennflächen der konkordanten Kongruenz zusammen, so ist diese Brennfläche eine Regelfläche.* Hierfür muß für jede Wahl des Parameters $\langle \mathfrak{a}^*, \mathfrak{a}^* \rangle = 0$ gelten, d.h. es muß

$$\langle \mathfrak{a}^*, \mathfrak{a}^* \rangle = \varphi^{-4}(\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle - 2A \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle + A^2 \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle) = 0$$

identisch in A erfüllt sein. Dies führt aber auf (17).

Gilt (17), so bilden die konkordanten Geraden die eine Schmiegtangentenschar der einzigen Brennfläche der konkordanten Kongruenz. Die Berührquadrik ist also Schmiegquadrik dieser Regelfläche. Gleichberechtigt zu $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ ist natürlich auch hier die zweite Brennfläche der Transversalkongruenz, d.h. $(\bar{\mathfrak{s}}_1, \bar{\mathfrak{s}}_2)$ mit (3).

$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ bzw. $(\bar{\mathfrak{s}}_1, \bar{\mathfrak{s}}_2)$ sind jetzt die *Fleknodaltransformierten* dieser durch die Figur ausgezeichneten Regelfläche. Umgekehrt hüllt die Schmiegquadrik einer beliebigen Regelfläche außer der Regelfläche selbst die Fleknodaltransformierten ein. Auf jeder der beiden fleknodaltransformierten Regelflächen ist also eine schichtbildende Dv-Schar ausgezeichnet, die zu der Schmiegquadrik der Regelfläche gehört. Eine solche schichtbildende Dv-Schar ist

durch (17) gekennzeichnet. Zu einer Dv-Schar mit (17) gehört also eine bestimmte Regelfläche und zu einer Regelfläche, deren Fleknodaltransformierte nicht zusammenfallen, zwei zueinander gehörende schichtbildende Dv-Scharen mit (17). *Diesen Zusammenhang kann man zur Behandlung der Regelflächen ausnützen.*

6. a) *Medianpunkte eines Kurvenpaares in einer Dv-Schar* nennt man das Punktepaar, dessen hyperbolisches Bild von der Tangente an die Bildkurve der Ausgangskurven bestimmt wird. Ist $\mathfrak{p}$ das Bild des Ausgangskurvenpaares, so sind die Medianpunkte in der Ebene durch

$$\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{p}' \tag{6.1}$$

gegeben. In Abhängigkeit von t beschreiben die Medianpunkte die *Mediankurven des Ausgangspaares in der Dv-Schar.*

Uns interessieren hier besonders die Mediankurven der Schmiegkurven, deren Bild also durch

$$\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}' \tag{6.2}$$

gegeben ist. Sie sind Mediankurven sowohl in bezug auf die zugrunde gelegte Dv-Schar, wie auch in bezug auf die Asymptotenlinien. Dies kommt daher, daß die bewegte Ebene längs $\mathfrak{b}$ in die feste abrollt, beide Polbahnen also dieselbe Tangente haben.

Die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}')$ ist die hyperbolische Normale der Kurve $\mathfrak{b}$. Sie schneidet im allgemeinen aus dem absoluten Kegelschnitt ebenfalls ein Punktepaar aus, dessen Urbilder die *harmonischen Kurven* beschreiben. Die harmonischen Kurven sind also dadurch definiert, daß ihre Punkte auf jeder Erzeugenden sowohl die Punkte des Ausgangspaares wie auch die Medianpunkte harmonisch trennen.

b) Ein auffallender Sonderfall unter den Dv-Scharen ist der, daß die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ die Tangente an $\mathfrak{b}$ ist. Es gilt dann

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = 0, \tag{6.3}$$

und dies bedeutet also, daß *die Medianpunkte der Schmiegkurven mit den Spiegelpunkten zusammenfallen.* Dann gehören aber die Fleknodalpunkte der durch $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ definierten Involution an, d.h. *die Fleknodalpunkte trennen die Spiegelpunkte harmonisch — und umgekehrt.* Es ist ja

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}').$$

(3) ist natürlich wegen (4.17) auch für die schichtbildenden Dv-Scharen erfüllt — hier sind die Spiegelkurven gar nicht erklärt. *Jedoch trennen auch hier die Medianpunkte der Schmiegkurven die Fleknodalpunkte harmonisch.* Wir sprechen noch kurz von beliebigen Kurvenpaaren einer Regelfläche mit dieser kennzeichnenden Eigenschaft.

c) Zur Diskussion stehen Kurvenpaare einer Regelfläche, deren Mediankurven in der Schar der Asymptotenlinien die Fleknodalkurven harmonisch

trennen. Solche Kurvenpaare kann man auf einer auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Regelfläche explizit angeben und sogar integrallos bestimmen. Man gehe hierzu von dem hyperbolischen Bild der Fleknodalkurven in der Schar der Asymptotenlinien aus und betrachte eine Geradenschar durch die Punkte der Bildkurve der Fleknodalkurven. Die Hüllkurve dieser Geradenschar liefert dann das hyperbolische Bild eines Kurvenpaares, dessen Mediankurven die Fleknodalkurven harmonisch trennen und jedes solche Kurvenpaar wird so erzielt.

Eine Dv-Schar mit der charakteristischen Eigenschaft (3) erzielt man jetzt, indem man in der bewegten Ebene eine beliebige Kurve vorgibt und diese längs der konstruierten Kurve der festen Ebene abrollt.

Kurvenpaare, wie sie hier in den Schmiegkurven auftreten, spielen in der Literatur eine zweifache Rolle. I. Sie sind geradengeometrisch durch die Existenz von ∞^4 quadratischen Komplexen ausgezeichnet, die die Erzeugende der Regelfläche und die Tangenten an die Kurven des Paares in zweiter Ordnung enthalten, während es im allgemeinen Fall nur ∞^3 solche Komplexe gibt. In diesem Zusammenhang treten die Kurvenpaare bei A. TERRACINI als „direttrici congiunte" auf[11]). II. Die Schmiegkurven der schichtbildenden Dv-Scharen haben diese Eigenschaft. Ist die charakteristische Kurve einer einparametrigen Quadrikschar ein Vierseit, so haben also die Eckpunkte dieses Vierseits auf den Vierseitseiten diese Eigenschaft. Unter diesem Gesichtspunkt treten die betrachteten Kurvenpaare bei H. KUNLE[12]) als Eckpunktpaare des charakteristischen Vierseits auf.

Auf diesen Zusammenhang soll genauer in einer kurzen Note hingewiesen werden.

d) Der Punkt

$$\mathfrak{p}(t) = \boldsymbol{p}_0(t)\,\mathfrak{x}(t) + \boldsymbol{p}_1(t)\,\mathfrak{z}(t) + \boldsymbol{p}_2(t)\,\bar{\mathfrak{x}}(t) \tag{6.4}$$

beschreibt im festen wie im bewegten System der hyperbolischen Ebene eine Kurve in Abhängigkeit von t. Betrachten wir die Kurve des bewegten Systems, so wollen wir

$$\mathfrak{p}' = \boldsymbol{p}_0'\,\mathfrak{x} + \boldsymbol{p}_1'\,\mathfrak{z} + \boldsymbol{p}_2'\,\bar{\mathfrak{x}} \tag{6.5}$$

setzen. Zur Unterscheidung sei die Kurve des festen Systems mit $\mathring{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Nach den Ableitungsgleichungen (3.8) ist

$$\mathring{\mathfrak{p}}' = \mathfrak{p}' + \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{b}. \tag{6.6}$$

Wir wenden dies an auf den Ort der momentanen Fixpunkte im bewegten und festen System, d. h. auf die Kurve $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathring{\mathfrak{b}}$. Wir haben es, wie bereits betont wurde, mit einer Abrollung der Kurve $\mathfrak{b}$ des bewegten über die Kurve $\mathring{\mathfrak{b}}$

[11]) TERRACINI, A.: Direttrici congiunte di una rigata. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **9**, 325—342 (1950).

[12]) Vgl. Fußnote 8, S. 57.

des festen Systems zu tun. Es gilt

$$\mathring{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b},$$

$$\mathring{\mathfrak{b}}' = \mathfrak{b}',$$

und

$$\mathring{\mathfrak{b}}'' = \mathfrak{b}'' + \mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{b}. \tag{6.7}$$

Der Ort der Fixpunkte durchläuft im bewegten System eine Gerade, wenn

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'') = 0; \tag{6.8}$$

dasselbe gilt im festen System, falls

$$(\mathring{\mathfrak{b}}, \mathring{\mathfrak{b}}', \mathring{\mathfrak{b}}'') = (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'' + \mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{b}) = 0 \tag{6.9}$$

ist.

Was bedeuten diese Bedingungen im Urbild? Gilt (8), so gibt es zwei Scharkurven der Dv-Schar — nämlich $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$ —, die die Schmiegkurven harmonisch trennen. Gilt (9), so gibt es zwei Asymptotenlinien — nämlich $\mathring{\mathfrak{b}} \wedge \mathring{\mathfrak{b}}'$ — mit derselben Eigenschaft.

e) Will man die Kurventheorie in die hyperbolische Kinematik einbauen, so wird man — wie im euklidischen — eine Bewegung zu betrachten haben, die invariant mit einer gegebenen Kurve verknüpft ist. Betrachten wir hierzu die hyperbolischen Bewegungen, in denen der Ort der momentanen Fixpunkte in der bewegten Ebene eine Gerade ist. Es gilt dann

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'') = 0. \tag{6.10}$$

In einer solchen Bewegung mit (10) ist ausgezeichnet einmal die Bahnkurve, die der in der bewegten Ebene feste Punkt $\mathring{\mathfrak{p}}(t) = \mathring{\mathfrak{b}} \wedge \mathring{\mathfrak{b}}'$ beschreibt, zum anderen sind ausgezeichnet die Bahnkurven, die von den in der bewegten Ebene festen Punkten $\mathring{\mathfrak{q}}(t)$ der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ erzeugt werden.

Wir wollen zeigen, daß es zu einer willkürlich vorgegebenen Kurve immer eine eindeutig bestimmte Bewegung mit (10) gibt, in der diese Kurve mit $\mathring{\mathfrak{p}}(t)$ bzw. mit einem der $\mathring{\mathfrak{q}}(t)$ zusammenfällt. Im ersten Fall rolle man die bewegte Ebene längs einer Geraden über die von den zu $\mathring{\mathfrak{p}}(t)$ polaren Geraden eingehüllte Kurve hyperbolisch ab ohne zu gleiten. Den zweiten Fall führt man hierauf zurück, indem man beachtet, daß $\mathring{\mathfrak{p}}(t)$ der zu $\mathring{\mathfrak{q}}(t)$ polare Punkt auf der Tangente an $\mathring{\mathfrak{q}}(t)$ ist.

Geht man auf das Urbild zurück, so folgen hieraus die beiden Sätze: (I) *Mit einem Kurvenpaar in einer Dv-Schar ist invariant eine zweite Dv-Schar verbunden, die die beiden Kurven als Scharkurven und als Mediankurven der Berührkurven enthält.* (II) *Mit einem Kurvenpaar in einer Dv-Schar ist invariant eine zweite Dv-Schar verbunden, die die beiden Kurven als Scharkurven enthält, der Art, daß diese die Mediankurven der Berührkurven harmonisch trennen.* Letztere nennt man die *Prinzipalschar des Kurvenpaares in der Ausgangsschar.*

In der Literatur wird die Aufgabe, mit einem Kurvenpaar in einer Dv-Schar eine zweite Dv-Schar zu verknüpfen, die die Kurven als Scharkurven enthält, meist analytisch formuliert: Die Vektoren, die zu den beiden Kurven gehören, sind invariant zu normieren. Um zwei Beispiele zu nennen: G. BOL[13]) verwendet in der Theorie der Regelflächen die Normierung nach (I). Bei A. TERRACINI[14]) findet sich bei der Behandlung der „direttrici congiunte" [vgl. c)] die Normierung nach (II).

Was sagt unsere geometrische Betrachtungsweise zu dieser Normierungsfrage? In beiden Fällen ist die Dv-Schar eindeutig bestimmt. Bei (I) gehört nun umgekehrt zu der Dv-Schar genau *ein* Kurvenpaar mit der angegebenen Eigenschaft [nämlich das Urbild von $\mathring{\mathfrak{b}} \wedge \mathring{\mathfrak{b}}'$], bei (II) dagegen eine einparametrige Schar [nämlich die Urbilder der festen Punkte auf $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$]. Andererseits weist der analytische Ausdruck für die hyperbolische Krümmung der Bildkurve bei (II) eine etwas einfachere Gestalt auf als bei (I) [vgl. (16), (19)].

Berechnen wir die hyperbolische Bogenlänge und Krümmung einer Bahnkurve in einer beliebigen Bewegung! Es sei die Basis des bewegten Systems so gewählt, daß $\mathring{\mathfrak{z}}$ diese Bahnkurve beschreibt. Dann wird nach den Ableitungsgleichungen (3.8)

$$\text{(6.11)} \qquad \begin{cases} \mathring{\mathfrak{z}}' = & a\,\mathring{\mathfrak{z}}_{01}, \\ \mathring{\mathfrak{z}}_{01}' = \varepsilon a\,\mathring{\mathfrak{z}} & + b\,\mathring{\mathfrak{z}}_{02}, \\ \mathring{\mathfrak{z}}_{02}' = & b\,\mathring{\mathfrak{z}}_{01}, \end{cases}$$

wobei

$$\text{(6.12)} \qquad \begin{cases} \mathring{\mathfrak{z}}_{01} = \dfrac{1}{a}\,(\beta_{21}\,\mathring{\mathfrak{x}} + \beta_{12}\,\overline{\mathring{\mathfrak{x}}}), & a^2 = \varepsilon\beta_{12}\beta_{21}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \\ \mathring{\mathfrak{z}}_{02} = \dfrac{1}{a}\,(\beta_{21}\,\mathring{\mathfrak{x}} - \beta_{12}\,\overline{\mathring{\mathfrak{x}}}), & b = \beta_{11} + \dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{\beta_{21}}{\beta_{12}}\right)' \end{cases}$$

gesetzt ist. Durch

$$\text{(6.13)} \qquad \int \sqrt{\varepsilon\,\beta_{12}\beta_{21}}\,dt$$

führt man also die hyperbolische Bogenlänge der Kurve $\mathring{\mathfrak{z}}$ ein. Die hyperbolische Krümmung von $\mathring{\mathfrak{z}}$ ist durch

$$\text{(6.14)} \qquad \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\beta_{12}\beta_{21}}}\left(\beta_{11} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\beta_{21}}{\beta_{12}}\right)'\right)$$

gegeben.

Kommen wir zurück zu den speziellen Bewegungen mit (10). Bei (I) legen wir die Basis des bewegten Systems so, daß $\mathring{\mathfrak{z}}$ die ausgezeichnete Kurve $\mathring{\mathfrak{b}} \wedge \mathring{\mathfrak{b}}'$ beschreibt. Dann ist

$$\text{(6.15)} \qquad \beta_{11} = \beta_{22} = 0$$

und für die Krümmung der Kurve $\mathring{\mathfrak{z}}$ finden wir nach (14)

$$\text{(6.16)} \qquad \frac{b}{a} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\,\beta_{12}\beta_{21}}}\left(\ln\frac{\beta_{21}}{\beta_{12}}\right)'.$$

[13]) Siehe Fußnote 9, S. 58.
[14]) Siehe Fußnote 11, S. 72.

Bei (II) möge $\mathring{\mathfrak{z}}$ ein im bewegten System fester Punkt der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ sein. Dann wird

$$\beta_{12}\beta'_{21} - \beta_{21}\beta'_{12} = 0. \tag{6.17}$$

Setzt man also

$$\beta_{12} = c\,\beta_{21} \tag{6.18}$$

so findet man hier für die hyperbolische Krümmung von $\mathring{\mathfrak{z}}$

$$\frac{b}{a} = c_1 \frac{\beta_{11}}{\beta_{21}} \quad \text{mit} \quad c_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{\varepsilon c}} = \text{const}. \tag{6.19}$$

f) Kann die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ im bewegten oder festen System fest sein? Ist dies der Fall, so durchläuft $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathring{\mathfrak{b}}$ diese feste Gerade. Es gilt (3), was z. B. bedeutet, daß die Mediankurven der Schmiegkurven die Fleknodalkurven harmonisch trennen [vgl. b)]. Weiterhin bedeutet dann aber (8), daß diese Mediankurven Scharkurven der Dv-Schar, bzw. (9), daß diese Mediankurven Asymptotenlinien sind.

In dem zuletzt genannten Fall — es gilt (3) mit (9) — ist das Bild der Fleknodalkurven in der Schar der Asymptotenlinien die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$, d. h. die Regelfläche gehört einem festen linearen Komplex an. Die beiden ausgezeichneten Asymptotenlinien sind Komplexkurven in diesem linearen Komplex. Diese beiden Komplexkurven trennen sowohl die Fleknodalkurven wie auch die Schmiegkurven harmonisch.

Man kann dies natürlich auch direkt nachrechnen. $\mathring{\mathfrak{d}}$ ist fest falls

$$\mathring{\mathfrak{d}}' = \varrho\,\mathring{\mathfrak{d}},$$

d. h. nach (6) falls

$$\mathfrak{d}' + \mathfrak{d} \wedge \mathfrak{b} = \varrho\,\mathfrak{d} \tag{6.20}$$

ist. Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a}$ erhält man hieraus unter Benützung der Identität (4.6) die beiden Bedingungen

$$\begin{cases} (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = 0, \\ (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}) = 0, \end{cases} \tag{6.21}$$

deren erste mit (3) identisch ist. Diese erlaubt den Ansatz

$$\mathfrak{a} = E\,\mathfrak{b} + G\,\mathfrak{b}', \tag{6.22}$$

wodurch die zweite Gl. (21) in

$$G^2(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'' + \mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{b}) = 0 \tag{6.23}$$

übergeht. (21) ist natürlich für $\mathfrak{d} = 0$ (die schichtbildenden Dv-Scharen) erfüllt. Sehen wir davon ab, dann ist in (22) $G \neq 0$ und, wie behauptet, (23) ist mit (3) und (9) identisch.

Hat man umgekehrt eine Komplexregelfläche — das hyperbolische Bild der Fleknodalkurven in der Schar der Asymptotenlinien ist eine Gerade — und auf ihr eine Dv-Schar, deren Schmiegkurven die beiden Komplexkurven

der Regelfläche harmonisch trennen, so liegt die betrachtete Figur vor. Man kann diese Dv-Scharen konstruieren, indem man in der Bildebene eine beliebige Kurve der bewegten Ebene über die feste Gerade der festen Ebene abrollt.

g) Wir beweisen weiterhin: *Die konkordante Kongruenz ist genau dann ein W-Strahlsystem, falls* (21) *gilt. Im allgemeinen ist dies gleichbedeutend mit dem Festsein der Geraden* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ *im festen System.*

Zum Beweis stellt man die Bedingung dafür auf, daß die Geradenvektoren

$$(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*), \quad (\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)_A, \quad (\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)_{AA}, \quad (\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)_{t^*}, \quad (\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)_{At^*}, \quad (\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)_{t^*t^*}$$

linear abhängen. Nach den Ableitungsgleichungen führt dies auf die Bedingung

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}) = 0, \tag{6.24}$$

die bei jeder Wahl der Parameterverteilung erfüllt sein muß. Bei Parametertransformation ist

$$(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{a}_{t^*}^* - \mathfrak{b}^* \wedge \mathfrak{a}^*) = \varphi^{-6}[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}) - A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}')]$$

und somit ist, wie behauptet, (24) mit (21) gleichbedeutend.

Beachten wir jetzt noch die geometrischen Folgerungen, die wir in f) gezogen haben, so können wir zusammenfassen: *Die konkordante Kongruenz einer schichtbildenden Dv-Schar ist trivialerweise ein W-Strahlsystem. Auf einer Regelfläche, die keinem linearen Komplex angehört, sind die schichtbildenden Dv-Scharen aber auch die einzigen dieser Eigenschaft. Gehört die Regelfläche einem nichtentarteten linearen Komplex an, so hat außerdem jede Dv-Schar, deren Schmiegkurven die beiden Komplexkurven harmonisch trennen, diese Eigenschaft.* Gehört die Regelfläche einem speziellen linearen Komplex an, so kann man noch die Dv-Scharen hinzurechnen, bei denen die eine Brennfläche der konkordanten Kongruenz in die Leitgerade des Komplexes entartet. *Kennzeichnend für die Dv-Scharen, deren konkordante Kongruenz ein W-Strahlsystem ist, ist dann natürlich auch, daß die Spiegelkurven — falls existent — Asymptotenlinien beschreiben.*

Für die Konstruktion dieser Dv-Scharen verweisen wir auf den letzten Abschnitt in f). Aus f) folgt noch, daß *mit einer Dv-Schar, deren konkordante Kongruenz ein W-Strahlsystem ist, auch jede zu ihr isogonale Schar*[15]) *insbesondere also auch die konjugierte Schar diese Eigenschaft hat.*

7. a) Die Halbinvariante β vom Gewicht 1 und die Größe α mit dem Transformationsverhalten

$$\beta^* = \varphi^{-1}\beta, \qquad \alpha^* = \varphi^{-2}(\alpha - A\beta)$$

gaben Anlaß zu der Halbinvarianten vom Gewicht 2

$$\beta_t - 2\alpha,$$

[15]) Vgl. 8d).

die die Fleknodalpunkte kennzeichnete. Eine Halbinvariante vom Gewicht 4 findet sich nun weiterhin unter Hinzunahme der Größe $\alpha_{11}+\alpha_{22}$ mit dem Transformationsverhalten

$$(\alpha_{11}^* + \alpha_{22}^*) = \varphi^{-2}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + 2A' - 2A^2)$$

wegen

$$\frac{d\alpha^*}{dt^*} = \varphi^{-3}(\alpha_t - A'\beta - A\beta_t - 4A\alpha + 4A^2\beta) \tag{7.1}$$

in der Kombination

$$h = 2\alpha_t\beta - 2\beta_t\alpha - 2\alpha^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\beta^2. \tag{7.2}$$

Dies ist offensichtlich die einzige Halbinvariante, in die α und β nur in der ersten Ableitung eingehen, außer den bereits früher genannten Größen, unter denen auch $\beta\,\delta$ eine Halbinvariante vom Gewicht 4 ist. Es gilt also

$$h^* = \varphi^{-4}h, \quad \beta^*\delta^* = \varphi^{-4}\beta\,\delta. \tag{7.3}$$

Mit irgendeiner Invarianten H, z. B. einer Zahlgröße, stellt auch

$$h + H\beta\,\delta \tag{7.4}$$

eine Halbinvariante vom Gewicht 4 dar.

Diese Ausdrücke sind jetzt Polynome der Ordnung 4 in s. Es gibt also im algebraischen Sinne vier Werte von s, in denen

$$h + H\beta\,\delta = 0 \tag{7.5}$$

wird. In der Hilfsebene sind also vier Punkte durch eine der Größen (4) bestimmt. Während wir ein Punktepaar auf dem absoluten Kegelschnitt durch die hindurchgehende Gerade bzw. den hierzu polaren Punkt kennzeichneten, können wir uns ein Punktequadrupel durch den Schnitt mit einem weiteren Kegelschnitt bestimmt denken.

So gehört zu (5) mit $H = \infty$ das Geradenpaar der beiden zu $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ polaren Geraden. Wir werden später auch zu den Werten

$$H = -6, \quad H = 2 \tag{7.6}$$

invariant mit der Dv-Schar verknüpfte Kegelschnitte der Hilfsebene finden. Da sie mit dem Geradenpaar in einem Büschel liegen, für das H projektiver Parameter ist, kann man auch jedes andere Punktequadrupel (5) hierdurch geometrisch kennzeichnen. Wir werden hierzu eine Quadrikschar $Q_0(t)$ betrachten, die aus Quadriken durch die charakteristische Kurve der Berührquadriken gebildet wird.

b) Um gleichzeitig noch andere Anwendungen zu ermöglichen, beschäftigen wir uns mit beliebigen Quadrikscharen $Q(t)$, die mit unserer Figur verknüpft sind. Eine solche Quadrikschar denken wir uns in lokalen Koordinaten durch

die drei Vektoren der Hilfsebene $\mathfrak{r}(t)$, $\mathfrak{s}(t)$, $\mathfrak{t}(t)$ und die Größe $F(t)$

$$(7.7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{r} = \{-\varrho_{21},\ \varrho_{11},\ \varrho_{12}\}, & \varrho_{22} + \varrho_{11} = 0, \\ \mathfrak{s} = \{-\sigma_{21},\ \sigma_{11},\ \sigma_{12}\}, & \sigma_{22} + \sigma_{11} = 0, \\ \mathfrak{t} = \{-\tau_{21},\ \tau_{11},\ \tau_{12}\}, & \tau_{22} + \tau_{11} = 0 \end{cases}$$

in der folgenden Weise gegeben:

$$(7.8)\qquad \begin{aligned} Q \equiv\ & \varrho_{12}\mathfrak{p}_0^2 - 2\varrho_{11}\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1 - \varrho_{21}\mathfrak{p}_1^2 + \\ & + \tau_{12}\mathfrak{p}_2^2 - 2\tau_{11}\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 - \tau_{21}\mathfrak{p}_3^2 + \\ & + 2\sigma_{12}\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_2 - 2\sigma_{11}(\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) - 2\sigma_{21}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3 + 2F(\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) = 0. \end{aligned}$$

Damit die Darstellung nicht von der besonderen Wahl der Parameterverteilung abhängt, fordern wir für die eingehenden Größen das Transformationsverhalten:

$$(7.9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{r}^* = \varphi\,\mathfrak{r}, \\ \mathfrak{s}^* = \mathfrak{s} + A\,\mathfrak{r}, \\ \mathfrak{t}^* = \varphi^{-1}(\mathfrak{t} + 2A\,\mathfrak{s} + A^2\mathfrak{r}), \\ F^* = F. \end{cases}$$

Dabei kommt es natürlich auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor aller Größen nicht an.

Wir bestimmen die charakteristische Kurve zweier benachbarter Quadriken $Q(t)$ und bilden hierzu $Q'(t)$ mittels der Stationaritätsbedingung (1.20). Kennzeichnet man die Quadrik $Q'(t)$ durch die Größen

$$\tilde{\mathfrak{r}},\quad \tilde{\mathfrak{s}},\quad \tilde{\mathfrak{t}},\quad \tilde{F},$$

so findet man:

$$(7.10)\qquad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}' - 2\mathfrak{s}, \\ 2\tilde{\mathfrak{s}} = 2\mathfrak{s}' - 2\mathfrak{t} - 2F\,\mathfrak{b} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\mathfrak{r} - 2\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{r} - 2\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{s}, \\ \tilde{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}' + 2F\,\mathfrak{a} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\mathfrak{s} - 2\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{s} - 2\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{t}, \\ 2\tilde{F} = 2F' + \langle\mathfrak{r},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{s},\mathfrak{b}\rangle. \end{cases}$$

c) Wann geht die Quadrik (8) durch die charakteristische Kurve der Schar der Berührquadriken? Diese besteht aus der Geraden

$$(7.11)\qquad \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 = 0$$

und der Kurve dritter Ordnung

$$(7.12)\qquad \mathfrak{y} = \alpha(\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2) + \beta(\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2).$$

Gehen wir mit (11) und (12) in (8) ein, so folgen die Identitäten in s:

$$(7.13)\qquad \varrho \equiv 0$$

und

$$(7.14)\qquad \alpha^2\varrho + 2\alpha\beta\sigma + \beta^2\tau \equiv 0.$$

Hierbei ist wie üblich mit dem gleichnamigen griechischen Buchstaben der dem Vektor zugeordnete quadratische Ausdruck in s zu verstehen. Man vgl. (3.6), (3.7).

(13) und (14) führen auf

$$\mathfrak{r} = 0, \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{t} = -2\mathfrak{a}. \tag{7.15}$$

Mit (15) *stellt* (8) *für jeden Wert von* F *eine Quadrik des Büschels durch die charakteristische Kurve der Berührquadriken dar.*

Wir denken uns die Funktion $F(t)$ irgendwie vorgegeben und betrachten die Quadrikschar $Q_0(t)$ mit (15). In welchen Punkten trifft die charakteristische Kurve dieser Quadrikschar $Q_0(t)$ die Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{y}$ (12)? Dies ist genau für die Werte von s der Fall, für die (14) mit $\tilde{\varrho}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ an Stelle von ϱ, σ, τ erfüllt ist. Nun nimmt (10) mit (15) die Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{r}} &= -2\mathfrak{b}, \\ 2\tilde{\mathfrak{s}} &= 2\mathfrak{b}' + 4\mathfrak{a} - 2F\mathfrak{b}, \\ \tilde{\mathfrak{t}} &= -2\mathfrak{a}' + 2F\mathfrak{a} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\mathfrak{b} + 6\mathfrak{d}, \\ 2\tilde{F} &= 2F' + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle. \end{aligned}\right. \tag{7.16}$$

Die gesuchten Punkte berechnen sich somit aus der Gleichung vierter Ordnung in s:

$$2\alpha_t\beta - 2\beta_t\alpha - 2\alpha^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\beta^2 - 6\beta\delta = 0. \tag{7.17}$$

Sie ist vom Typ (5) mit

$$H = -6. \tag{7.18}$$

Die Größe F geht in diese Gleichung gar nicht ein: Die charakteristische Kurve *jeder* Quadrikschar $Q_0(t)$ schneidet die Kurve dritter Ordnung (12) in *denselben* Punkten. Dies heißt aber, daß zwei benachbarte Kurven dritter Ordnung $\mathfrak{y}(t)$ sich in diesen Punkten berühren. *Die Hüllfläche der Berührquadriken, die erzeugt wird von den Kurven dritter Ordnung* (12), *besitzt vier singuläre Kurven, die eingehüllt werden von den erzeugenden Kurven dritter Ordnung* (12).

In diesen Punkten ist natürlich die Tangentenebene an die Fläche $\mathfrak{y}$ unbestimmt. Aus Stetigkeitsgründen werden wir jedoch — falls dies zur Diskussion steht — die Ebene $\mathfrak{Y}$ in (2.21) als *die* Tangentenebene in dem Punkte betrachten.

d) Die vier Punkte (17) der Bildebene werden von einem invariant mit der Figur verbundenen Kegelschnitt aus dem absoluten Kegelschnitt ausgeschnitten. Ein Kegelschnitt der Bildebene — als Gesamtheit seiner Punkte aufgefaßt — bedeutet eine quadratische Gesamtheit von Punktepaaren in dem binären Gebiet, die genau für die Werte (17) zusammenfallen.

Wir zeigen: *Durch jede der Quadrikscharen* $Q_0(t)$ *ist auf einer bestimmten konkordanten Geraden ein und dieselbe Involution erklärt, deren Doppelpunkte*

sich in die Bildebene (in Abhängigkeit von der ausgewählten konkordanten Geraden) auf die Punktepaare eines Kegelschnitts abbilden, der den absoluten Kegelschnitt in (17) *schneidet.*

Betrachten wir etwa die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ — bei geeigneter Parameterverteilung können wir sie ja mit jeder konkordanten Geraden zusammenfallen lassen. Eine beliebige Quadrikschar bestimmt auf ihr (wie auch auf jeder anderen Geraden) eine Involution, der nicht nur die Schnittpunkte mit der Quadrik, sondern auch noch die mit der benachbarten Quadrik angehören. In der Bildebene ist diese Involution durch $(\mathfrak{t}, \tilde{\mathfrak{t}})$ gekennzeichnet und ihre Doppelpunkte bestimmen sich also aus

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{t} \wedge \tilde{\mathfrak{t}}. \tag{7.19}$$

Wenden wir dies an auf eine der Quadrikscharen $Q_0(t)$, gehen also mit (15) und (16) in (19) ein, so wird:

$$\mathfrak{n} = 4\,\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}' - 2(\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\mathfrak{b} - 12\,\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}. \tag{7.20}$$

Die Involution ist also tatsächlich von der ausgewählten Quadrikschar $Q_0(t)$ unabhängig — in (20) tritt ja F nicht ein. Gehen wir nun auf eine andere konkordante Gerade $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ über, so berechnen sich die Bildpunkte der Doppelpunkte der zu ihr gehörenden Involution aus

$$\mathfrak{n}^* = \varphi^{-5}[\mathfrak{n} + 4A(\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}' + 3\,\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}) + 4A^2\,\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})]. \tag{7.21}$$

Das Bild der Doppelpunkte bestimmt also in der hyperbolischen Ebene einen Kegelschnitt.

e) Wir wollen entsprechend die duale Frage behandeln. Eine Fläche zweiter Klasse $\overline{Q}(t)$ denken wir uns durch die Vektoren $\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{t}}$ und die Größe $\overline{F}$

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{r}} = \{-\bar{\varrho}_{21},\ \bar{\varrho}_{11},\ \bar{\varrho}_{12}\}, & \bar{\varrho}_{11} + \bar{\varrho}_{22} = 0, \\ \bar{\mathfrak{s}} = \{-\bar{\sigma}_{21},\ \bar{\sigma}_{11},\ \bar{\sigma}_{12}\}, & \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} = 0, \\ \bar{\mathfrak{t}} = \{-\bar{\tau}_{21},\ \bar{\tau}_{11},\ \bar{\tau}_{12}\}, & \bar{\tau}_{11} + \bar{\tau}_{22} = 0, \end{cases} \tag{7.22}$$

in der Form

$$\begin{cases} \overline{Q} \equiv & \bar{\varrho}_{12} P_0^2 - 2\bar{\varrho}_{11} P_0 P_1 - \bar{\varrho}_{21} P_1^2 + \\ & + \bar{\tau}_{12} P_2^2 - 2\bar{\tau}_{11} P_2 P_3 - \bar{\tau}_{21} P_3^2 + \\ & + 2\bar{\sigma}_{12} P_0 P_2 - 2\bar{\sigma}_{11}(P_0 P_3 + P_1 P_2) - 2\bar{\sigma}_{21} P_1 P_3 + 2\overline{F}(P_0 P_3 - P_1 P_2) = 0 \end{cases} \tag{7.23}$$

gegeben. Die charakteristische Ebenengesamtheit zweier benachbarter Quadriken bestimmt sich aus dem Schnitt von $\overline{Q}(t)$ und $\overline{Q}'(t)$. Kennzeichnet wieder $\tilde{\bar{\mathfrak{r}}}, \tilde{\bar{\mathfrak{s}}}, \tilde{\bar{\mathfrak{t}}}, \tilde{\overline{F}}$ die Quadrik $\overline{Q}'(t)$, so findet man mittels (1.21):

$$\begin{cases} \tilde{\bar{\mathfrak{r}}} = \bar{\mathfrak{r}}' - 2\bar{\mathfrak{s}} - 2\mathfrak{b} \wedge \bar{\mathfrak{r}}, \\ 2\tilde{\bar{\mathfrak{s}}} = 2\bar{\mathfrak{s}}' - 2\bar{\mathfrak{t}} + 2\overline{F}\,\mathfrak{b} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\bar{\mathfrak{r}} + 2\mathfrak{a} \wedge \bar{\mathfrak{r}} - 2\mathfrak{b} \wedge \bar{\mathfrak{s}}, \\ \tilde{\bar{\mathfrak{t}}} = \bar{\mathfrak{t}}' - 2\overline{F}\,\mathfrak{a} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\bar{\mathfrak{s}} + 2\mathfrak{a} \wedge \bar{\mathfrak{s}}, \\ 2\tilde{\overline{F}} = 2\overline{F}' - \langle \bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a} \rangle - \langle \bar{\mathfrak{s}}, \mathfrak{b} \rangle. \end{cases} \tag{7.24}$$

Die Flächen zweiter Ordnung (8) und die Flächen zweiter Klasse (23) entsprechen sich durch Polarität an der Berührquadrik mit gleichbenannten Koeffizientengrößen. Wir wollen diese eineindeutige Abbildung immer verwenden, um der einfacheren Sprechweise halber die Punktgebilde zu betrachten.

Dual entsprechend der in d) durchgeführten Überlegung bestimmt eine Quadrikschar $\overline{Q}_0(t)$, für die also

$$\bar{\mathfrak{r}} = 0, \quad \bar{\mathfrak{s}} = \mathfrak{b}, \quad \bar{\mathfrak{t}} = -2\mathfrak{a} \tag{7.25}$$

gilt, auf $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ eine Involution, deren Doppelpunkte sich auf

$$\bar{\mathfrak{n}} = 4\,\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}' - 2(\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\mathfrak{b} + 4\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \tag{7.26}$$

abbilden. Durch Übergang auf eine allgemeine Parameterverteilung findet man das Bild der Doppelpunkte

$$\bar{\mathfrak{n}}^* = \varphi^{-5}[\mathfrak{n} + 4A(\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}) + 4A^2\,\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})] \tag{7.27}$$

auf der konkordanten Geraden $(\mathfrak{E}_1^*, \mathfrak{E}_2^*)$.

Der Kegelschnitt (27) schneidet aus dem absoluten Kegelschnitt vier Punkte aus. Wie oben findet man für sie die Gleichung vierter Ordnung

$$2\alpha_t\beta - 2\alpha\beta_t - 2\alpha^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\beta^2 + 2\beta\,\delta = 0, \tag{7.28}$$

die (17) in gewisser Weise dual entspricht. *Auf jeder Erzeugenden gibt es im allgemeinen vier Stellen, in denen die Schmiegebene der hindurchgehenden Scharkurve stationär ist; diese Stellen berechnen sich aus* (28).

Die Ebenen $\mathfrak{y}(t, s)$ mit (28) gehören ja nicht nur jeder der Quadriken $\overline{Q}_0(t)$ an, sondern auch noch jeder der hierzu benachbarten. Dies kann nur sein, wenn benachbarte Ebenengesamtheiten $\mathfrak{y}(t, s)$ an den Werten (28) für s eine Ebene gemeinsam haben. Hieraus folgt die Behauptung, da $\mathfrak{y}(t, s)$ die Schmiegebene an die Scharkurve $\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2$ ist [vgl. (2.21)]. Dies kann man auch so aussprechen: *In der zweiparametrigen Ebenengesamtheit* $\mathfrak{y}(t, s)$ *gibt es vier singuläre Kurven* $s(t)$, *in denen benachbarte Kurven dritter Ordnung* $\mathfrak{y}$ *(betrachtet als die Gesamtheit ihrer Schmiegebenen) eine Ebene gemeinsam haben.*

(28) ist vom Typus (5) mit

$$H = 2. \tag{7.29}$$

Daraus folgt: *Die vier singulären Punkte der Punktgesamtheit* $\mathfrak{y}(t, s)$ *und die vier singulären Ebenen der Ebenenmannigfaltigkeit* $\mathfrak{y}(t, s)$ *gehören mit dem Punktequadrupel, gebildet aus Schmiegstellen und Spiegelpunkten, einer Involution vierter Ordnung an.* Die Punktequadrupel dieser Involution werden von den Kegelschnitten des Büschels, das von (21) und (27) aufgespannt wird, aus dem absoluten Kegelschnitt ausgeschnitten.

f) Denken wir uns auf der Geraden $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ ein Punktepaar durch sein hyperbolisches Bild $\mathfrak{t}$ festgelegt. $\mathfrak{t}$ möge bei Sterntransformation das Verhalten

$$\mathfrak{t}^* = \varphi^{-1}(\mathfrak{t} + 2A\,\mathfrak{s} + A^2\,\mathfrak{r}) \tag{7.30}$$

zeigen, d.h. die Bildpunkte durchlaufen in Abhängigkeit von der konkordanten Geraden in der hyperbolischen Ebene einen Kegelschnitt. Dann gilt: *Die so auf der Berührquadrik festgelegten Kurvenzweige bilden eine Kurve vierter Ordnung, die von der nach* (8) *bestimmten Quadrik aus der Berührquadrik ausgeschnitten wird. Jede Kurve vierter Ordnung erster Art auf der Berührquadrik läßt sich so erzielen.*

Ist in (30)

$$\mathfrak{x} = 0, \tag{7.31}$$

so gehören die Punktepaare einer Involution an. Hier gilt entsprechend: *Die durch* (30) *mit* (31) *auf den konkordanten Geraden der Berührquadrik festgelegten Punktepaare bestimmen eine Kurve dritter Ordnung, die von der nach* (8) *bestimmten Quadrik aus der Berührquadrik ausgeschnitten wird. Beide Quadriken schneiden sich hier außerdem noch in* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$. *Jede Kurve dritter Ordnung auf der Berührquadrik, die die konkordanten Geraden in je zwei, die Transversalgeraden in je einem Punkte trifft, läßt sich so erzielen.*

Wir haben in den Punktepaargesamtheiten $\mathfrak{n}^*$ bzw. $\bar{\mathfrak{n}}^*$ Beispiele solcher Bilder von Kurven vierter Ordnung auf der Berührquadrik vor uns, die zudem invariant mit der Figur verknüpft sind. Beide Kurven vierter Ordnung schneiden die Erzeugende $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ in demselben Punktepaar, dessen Bild der Punkt

$$\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a}) \tag{7.32}$$

ist. Nach (8.25) gilt hierfür: *Die durch* $\mathfrak{n}^*$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{n}}^*$ *definierten Kurven vierter Ordnung schneiden aus* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *dasselbe Punktepaar, nämlich die Spiegelpunkte der Isogonalschar*[16]) *mit* $D = 3$ *aus* [vgl. (8.25)].

Insbesondere folgt: *Ist einer der Schnittpunkte von* $\mathfrak{v}(t, s)$ *und* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *singulärer Punkt auf* $\mathfrak{v}(t, s)$, *so ist die Schmiegebene der durch diesen Punkt laufenden Scharkurve stationär — und umgekehrt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Spiegelpunkte der Isogonalschar mit* $D = 3$ *zusammenfallen.* Ferner: *Das Punktepaar* $\beta = 0$ *stellt dann und nur dann ein Paar singulärer Punkte auf* $\mathfrak{v}(t, s)$ *bzw. singulärer Ebenen auf* $\mathfrak{V}(t, s)$ *dar, wenn die Isogonalschar mit* $D = 3$ *schichtbildend ist.*

Mit einer Kurve vierter Ordnung auf der Berührquadrik ist zugleich eine Kurve dritter Ordnung bestimmt, die die Kurve vierter Ordnung in den beiden Schnittpunkten mit der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ berührt. Im Bild wird diese Kurve dritter Ordnung durch die Tangente an den Kegelschnitt $\mathfrak{k}^*$ im Punkte $\mathfrak{x}$ bestimmt. Analytisch folgt dies daraus, daß die Größe $\mathfrak{z}$, die nach (30) mit $\mathfrak{k}^*$ verbunden ist, das Transformationsverhalten

$$\mathfrak{z}^* = \mathfrak{z} + A\,\mathfrak{x}$$

zeigt.

Die beiden invarianten Kurven vierter Ordnung mit dem Bild $\mathfrak{n}^*$ bzw. $\bar{\mathfrak{n}}^*$ haben zwar mit der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ dasselbe Punktepaar gemein, sie

[16]) Vgl. 8d).

laufen jedoch in dieses Punktepaar im allgemeinen von verschiedenen Richtungen ein. Die zugehörigen Kurven dritter Ordnung sind auf

(7.33) $$(\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}' + 3\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d}) + 2A\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})$$

bzw. auf

(7.34) $$(\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d}) + 2A\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})$$

abgebildet.

Wann fallen die beiden Kurven dritter Ordnung zusammen, mit anderen Worten, wann berühren sich die beiden Kurven vierter Ordnung in dem Punktepaar auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$? Wir zeigen: *Berührt einer der beiden Kegelschnitte* $\mathfrak{n}^*, \bar{\mathfrak{n}}^*$ *die Polare des Punktes* $\mathfrak{b}$ *bezüglich des absoluten Kegelschnittes [im Punkte* $\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})$*], so auch der andere; die beiden Kurven dritter Ordnung definieren dieselbe Involution, deren Bild die Polare von* $\mathfrak{b}$ *ist. Kennzeichnend hierfür ist*

(7.35) $$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = 0$$

(man vgl. Abschnitt 6); dies bedeutet z. B., daß die Medianpunkte der Schmiegkurven mit den Spiegelpunkten zusammenfallen. Das Verschwinden des Skalarprodukts von $\mathfrak{b}$ mit einem der Vektoren (33), (34) führt sofort auf (35).

Umgekehrt gilt: *Fallen die Tangenten an die Kegelschnitte* $\mathfrak{n}^*, \bar{\mathfrak{n}}^*$ *in dem gemeinsamen Punkt* $\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' - \mathfrak{a})$ *zusammen, so stellt dieser Punkt entweder die Spiegelpunkte dar, oder sein Urbild trennt die Spiegelpunkte harmonisch.*

Betreffs der gegenseitigen Lage der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{n}^*$ und $\bar{\mathfrak{n}}^*$ ist dann noch hervorzuheben, daß diese die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ in denselben Punkten schneiden. Es ist ja

$$\langle \mathfrak{d}, \mathfrak{n} \rangle = \langle \mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{n}} \rangle = 4(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}') - 2(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \langle \mathfrak{d}, \mathfrak{d} \rangle .$$

Man findet die Schnittpunkte

$$\mathfrak{a} - A\mathfrak{b}$$

aus

(7.36) $$\langle \mathfrak{d}, \mathfrak{n} \rangle + 4A\left((\mathfrak{d}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) - (\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}')\right) + 4A^2(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}' + \mathfrak{a}) = 0.$$

g) Als gemeinsame Singularitätenstellen von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ kommen [man vgl. (5), (17), (28)] nur die Schmiegstellen oder die Spiegelpunkte in Frage. Wir haben bereits gesehen unter welchen Bedingungen die Schmiegstellen, d. h. Punkte auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ gemeinsame Singularitätenstellen von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ sind [vgl. f)]. Wir stellen die gleiche Frage nun für die Spiegelpunkte.

Es ist also zu untersuchen, wann einer der Schnittpunkte (36) zugleich auf dem absoluten Kegelschnitt liegt. Wir wählen die Parameterverteilung so, daß $\mathfrak{a}$ ein solcher Punkt ist. Dann gilt also

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = 0 \quad \text{und damit} \quad \langle \mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle = 0.$$

Dann führt aber

$$\langle \mathfrak{d}, \mathfrak{n} \rangle = 0$$

auf

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0.$$

Somit: *Betrachten wir diejenigen konkordanten Geraden, die Tangenten an die Kurven dritter Ordnung* $\mathfrak{y}$ *sind, so definieren sie auf den Brennflächen der konkordanten Kongruenz zwei ausgezeichnete Kurven. Ist eine davon Singularitätenkurve, so gilt das gleiche für die Ebenengesamtheit* $\mathfrak{Y}$. *Dies ist genau dann der Fall, wenn zu den so ausgewählten konkordanten Geraden ein* CARTANscher *Parameter gehört. Dies bedeutet nach* (8.30), *daß die Kurve auf* $\mathfrak{y}$ *Torsallinie ist.*

Entsprechend beweist man auch: *Trennt auf einer konkordanten Geraden* $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ *das Urbild von* $\mathfrak{n}$ *die Spiegelpunkte harmonisch (das Urbild von* $\bar{\mathfrak{n}}$ *hat dann die gleiche Eigenschaft) und schneidet die Regelfläche* $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ *die Berührquadrik involutorisch* [vgl. 8c)], *so trennen auch die Medianpunkte der Brennpunktskurven der konkordanten Kongruenz auf* $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ *die Spiegelpunkte harmonisch. Zwei der Aussagen bedingen die dritte.*

h) Betrachtet man *dieselbe* Quadrik als Gesamtheit ihrer Punkte bzw. Gesamtheit ihrer Ebenen, so bestehen zwischen den Größen $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, F$ und $\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{t}}, \bar{F}$ die Beziehungen:

$$(7.37)\quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{r}} = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{r}, \mathfrak{r}\rangle \mathfrak{t} - \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{s} + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{r} + 2F(\mathfrak{s} \wedge \mathfrak{r}) - F^2 \mathfrak{r}, \\ \bar{\mathfrak{s}} = -\frac{1}{2}\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{s} - \frac{1}{2}\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{r}\rangle \mathfrak{s} + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{r}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{t} + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{t}\rangle \mathfrak{r} + F(\mathfrak{r} \wedge \mathfrak{t}) - F^2 \mathfrak{s}, \\ \bar{\mathfrak{t}} = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t}\rangle \mathfrak{r} - \langle \mathfrak{t}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{s} + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{t} + 2F(\mathfrak{s} \wedge \mathfrak{t}) - F^2 \mathfrak{t} \\ \bar{F} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}) + \frac{1}{2}F[\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle - \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{t}\rangle] + F^3. \end{cases}$$

8. a) Wir wollen den Zusammenhang zwischen verschiedenen Dv-Scharen derselben Regelfläche untersuchen. Wir gehen aus von (1.23) und bestimmen

$$\hat{\mathfrak{q}}_i'' = [\hat{\alpha}_{ik} + \gamma_{ik}' - (\gamma_{il} + \beta_{il})\gamma_{lk}]\,\hat{\mathfrak{q}}_k + [2\gamma_{ik} + \hat{\beta}_{ik}]\,\hat{\mathfrak{q}}_k', \qquad i = 1, 2.$$

Hieraus entnehmen wir für die Invarianten der Dv-Schar

$$(8.1)\qquad \hat{\mathfrak{q}}_1 + \hat{s}\,\hat{\mathfrak{q}}_2, \qquad \hat{s} = \text{const},$$

die wir zur Unterscheidung mit einer $\sim$ versehen:

$$(8.2)\quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{b}} = \hat{\mathfrak{b}} + 2\mathfrak{c}, \\ \tilde{\mathfrak{a}} = \hat{\mathfrak{a}} + \mathfrak{c}' - \hat{\mathfrak{b}} \wedge \mathfrak{c}, \\ \tilde{\alpha}_{11} + \tilde{\alpha}_{22} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \langle \hat{\mathfrak{b}} + \mathfrak{c}, \mathfrak{c}\rangle, \end{cases}$$

wobei

$$(8.3)\quad \begin{cases} \hat{\alpha}_{ik} = c_{il}\alpha_{lm}c_{mk}^{-1}, \\ \hat{\beta}_{ik} = c_{il}\beta_{lm}c_{mk}^{-1}, \\ \gamma_{ik} = c_{il}'c_{lk}^{-1}, \\ \mathfrak{c} = \{-\gamma_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{12}\} \end{cases}$$

gesetzt ist. Weiter ist hierin wegen (1.22)

$$(8.4)\qquad \gamma_{11} + \gamma_{22} = 0$$

zu beachten.

An einer festen Stelle $t=t_0$ können wir immer

$$c_{ik}(t_0)=\delta_{ik} \tag{8.5}$$

setzen, so daß

$$\hat{\alpha}_{ik}(t_0)=\alpha_{ik}(t_0), \quad \hat{\beta}_{ik}(t_0)=\beta_{ik}(t_0) \tag{8.6}$$

wird.

b) Die konkordanten Geraden, die zu verschiedenen Dv-Scharen gehören, sind eineindeutig aufeinander bezogen durch die Beziehungen [vgl. (1.22), (1.23) und (5)]:

$$\begin{cases} \tilde{\mathfrak{z}}_1=\mathfrak{z}_1+\gamma_{11}\,\mathfrak{q}_1+\gamma_{12}\,\mathfrak{q}_2, \\ \tilde{\mathfrak{z}}_2=\mathfrak{z}_2+\gamma_{21}\,\mathfrak{q}_1+\gamma_{22}\,\mathfrak{q}_2. \end{cases} \tag{8.7}$$

Dies folgt analytisch schon daraus, daß sich die Parameterverteilung in einer Dv-Schar auf die sie tragende Regelfläche überträgt.

Geometrisch erklärt sich die Abbildung in der folgenden Weise: Man beachte zuerst, daß zwei konkordante Geraden (auch solche, die zu verschiedenen Dv-Scharen gehören) durch die Transversalgeraden auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ und damit auch aufeinander projektiv abgebildet sind. So gehören etwa die Punkte $\tilde{\mathfrak{z}}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{z}_1$ zusammen. Nun schneidet die Verbindungsgerade $(\tilde{\mathfrak{z}}_1, \mathfrak{z}_1)$ die Erzeugende $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ in dem Punkt

$$\gamma_{11}\,\mathfrak{q}_1+\gamma_{12}\,\mathfrak{q}_2.$$

Dem Punkt $\mathfrak{q}_1$ ist also in dieser Weise der Punkt $\gamma_{11}\,\mathfrak{q}_1+\gamma_{12}\,\mathfrak{q}_2$ zugeordnet.

Wir betrachten das so entstandene Punktepaar auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$:

$$s(\gamma_{11}\,s-\gamma_{12})=-\gamma_{12}\,s+\gamma_{11}\,s^2=0.$$

Ihm entspricht in der hyperbolischen Ebene der Punkt

$$\gamma_{11}\,\mathfrak{x}+\tfrac{1}{2}\gamma_{12}\,\mathfrak{z}.$$

Das Punktepaar trennt die Berührpunkte der beiden Dv-Scharen harmonisch. Die Berührpunkte sind ja auf

$$\mathfrak{c}=-\gamma_{21}\,\mathfrak{x}-\tfrac{1}{2}(\gamma_{22}-\gamma_{11})\,\mathfrak{z}+\gamma_{12}\,\bar{\mathfrak{x}} \tag{8.8}$$

abgebildet und es ist

$$\langle \mathfrak{c}, \gamma_{11}\,\mathfrak{x}+\tfrac{1}{2}\gamma_{12}\,\mathfrak{z}\rangle=0.$$

Der Punkt $\mathfrak{q}_1$ ist vor anderen Punkten der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ nicht ausgezeichnet und es gilt also: *Betrachtet man die Transversalgeraden zweier verschiedener Dv-Scharen durch einen Punkt* $\mathfrak{p}$ *der Erzeugenden* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$, *so liegen zusammengehörige Punkte der beiden Transversalgeraden mit* $\bar{\mathfrak{p}}$, *dem vierten harmonischen Punkt zu* $\mathfrak{p}$ *bezüglich der Berührstellen der beiden Dv-Scharen, in einer Geraden. So sind mit ihren Punkten auch die Scharen konkordanter Geraden zweier verschiedener Dv-Scharen projektiv aufeinander abgebildet.*

c) *Die* CARTANschen *Parameter, für die also*

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0 \tag{8.9}$$

gilt, sind geometrisch dadurch ausgezeichnet, daß die zugehörigen Regelflächen $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ *die Berührquadrik involutorisch schneiden.* Haben zwei Regelflächen eine Erzeugende gemein und berühren sie sich nicht längs dieser Erzeugenden, so ist jedem Punkt $\mathfrak{r}$ der gemeinsamen Erzeugenden ein Punkt $\bar{\mathfrak{r}}$ dieser Erzeugenden dadurch zugeordnet, daß die Tangentenebene an die erste Regelfläche im Punkt $\mathfrak{r}$ die zweite Regelfläche im Punkte $\bar{\mathfrak{r}}$ berührt. Diese Abbildung ist immer eine Projektivität der gemeinsamen Erzeugenden auf sich, hat aber nur in Spezialfällen involutorischen Charakter.

In dem Punkt $\mathfrak{x}_1 + s\,\mathfrak{x}_2$ ist die Ebene $\Xi_1 - s\,\Xi_2$ Tangentenebene an die Berührquadrik. Wegen

$$(\mathfrak{x}_1 + \bar{s}\,\mathfrak{x}_2)' \equiv \alpha_{11}\,\mathfrak{q}_1 + \alpha_{12}\,\mathfrak{q}_2 + \bar{s}\,(\alpha_{21}\,\mathfrak{q}_1 + \alpha_{22}\,\mathfrak{q}_2) \pmod{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2}$$

berührt diese Ebene die Regelfläche $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ in dem Punkt

$$(\alpha_{11} + \bar{s}\,\alpha_{21})\,s + (\alpha_{12} + \bar{s}\,\alpha_{22}) = 0. \tag{8.10}$$

Die Abbildung (10), deren Doppelpunkte natürlich die Brennpunkte der konkordanten Kongruenz auf $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ sind, ist nun — wie behauptet — genau dann involutorisch, falls (9) gilt.

d) Ist g irgendeine Halbinvariante vom Gewicht 2:

$$g^* = \varphi^{-2}\,g \tag{8.11}$$

so definiert

$$(\alpha_{11}^* + \alpha_{22}^*) - g^* = 0 \tag{8.12}$$

einen zu dieser Halbinvarianten gehörenden projektivinvarianten Parameter. Die Regelflächen $(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)$ mit (12) bilden deshalb die Scharen konkordanter Geraden entlang der Dv-Schar projektiv aufeinander ab. Dies gilt insbesondere auch für den Spezialfall der CARTANschen Parameter.

Die CARTANschen Parameter einer zweiten Dv-Schar haben für die Ausgangsschar diesen Charakter (12) mit

$$g = -\tfrac{1}{2}\langle \tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\rangle. \tag{8.13}$$

Insbesondere interessiert hier

$$g = -\tfrac{1}{2}\langle \tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\rangle = 0, \tag{8.14}$$

d. h., daß die CARTANschen Parameter zweier Dv-Scharen sich entsprechen.

Die Berührstellen zweier Dv-Scharen und ihre Schmiegstellenpaare gehören nach der ersten Gl. (2) einer Involution an[17]). Denn diese Punkte-

[17]) Dies gilt auch für die Berührstellenpaare dreier Dv-Scharen. Die momentanen Drehpole dreier relativ zueinander bewegten Systeme der hyperbolischen Ebene liegen in einer Geraden.

paare werden der Reihe nach auf $\mathfrak{b}$, $\tilde{\mathfrak{b}}$, $2\mathfrak{c} = \tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{b}$ abgebildet. In dieser Involution gibt es ein viertes Punktepaar

$$\tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b} = 2(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \tag{8.15}$$

das das Punktepaar der Berührstellen von den Punktepaaren der Schmiegstellen harmonisch trennt. Das Urbild von (15) möge *assoziiertes* Punktepaar zweier Dv-Scharen heißen. (14) lehrt dann: *Die* CARTANschen *Parameter zweier Dv-Scharen, deren Schmiegstellen verschieden sind, entsprechen sich dann und nur dann, wenn die assoziierten Punkte die Berührstellen harmonisch trennen.*

Ist die durch die Schmiegstellen zweier Dv-Scharen definierte Involution entartet, so ist auch hier ein assoziiertes Punktepaar beider Dv-Scharen erklärt: Das Doppelverhältnis von vier Punktepaaren einer entarteten Involution ist das gewöhnliche Doppelverhältnis der freien Punkte (während die zweiten Punkte aller Paare der Involution ja zusammenfallen). *Haben zwei Dv-Scharen eine aber nicht beide Schmiegstellen gemeinsam, so entsprechen sich die* CARTANschen *Parameter dann und nur dann, falls die assoziierten Punkte zusammenfallen.*

Wir wollen jetzt eine zweite Dv-Schar betrachten, deren Schmiegstellen mit denen der Ausgangsschar zusammenfallen. Hier gilt

$$\tilde{\mathfrak{b}} - D\,\mathfrak{b} = 0. \tag{8.16}$$

Wir sprechen dann von zwei zueinander *isogonalen Scharen*. Betrachten wir die von einem Punkt der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ auslaufenden Kurven, nämlich die Erzeugende selbst, die krummlinige Asymptotenlinie, die Scharkurve der ersten bzw. der zweiten Dv-Schar. Ihre Richtungen haben ein Doppelverhältnis D, das genau für zueinander isogonale Scharen nicht von dem betrachteten Punkt auf der Erzeugenden abhängt. D in (16) gibt den Wert dieser Vollinvarianten an.

Von zueinander isogonalen Scharen im strengen Sinne sprechen wir insbesondere, wenn

$$D = \text{const}, \tag{8.17}$$

das Doppelverhältnis also entlang der Regelfläche konstant ist. Hierunter fallen die zueinander konjugierten Scharen mit

$$D = -1. \tag{8.18}$$

Es folgt: *Die* CARTANschen *Parameter auf zwei zueinander isogonalen Scharen mit nichtzusammenfallenden Schmiegkurven entsprechen sich dann und nur dann, wenn die Scharen konjugiert sind. Fallen die Schmiegkurven in eine Kurve zusammen, dann entsprechen sich die* CARTANschen *Parameter immer.*

Mit (16) geht (13) über in

$$g = -\tfrac{1}{4}(D^2 - 1)\,\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle, \tag{8.19}$$

und wir entnehmen daraus weiterhin: *Sind die Schmiegkurven einer Dv-Schar verschieden, so gibt es stets genau zwei Dv-Scharen, die zu der Ausgangsschar*

isogonal sind und die einen vorgegebenen projektivinvarianten Parameter (12) *als* CARTAN*schen Parameter besitzen. Diese Dv-Scharen sind zueinander konjugiert. Der Zusammenhang läßt sich umkehren.*

Diese Scharen sind reell, falls

$$1 - \frac{4g}{\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle} \geq 0 .$$

Gilt das Gleichheitszeichen, so fallen sie in die Schar der Asymptotenlinien zusammen.

Letzten Endes ist noch zu erwähnen, daß *die* CARTAN*schen Parameter einer Dv-Schar dann und nur dann mit denen der Asymptotenlinien übereinstimmen, wenn die Schmiegkurven zusammenfallen.*

e) Der Kehlpunkt der Geradenschar $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ im bewegten bzw. festen System ist der Punkt

$$\mathfrak{c} = E_1 \mathfrak{b} + E_2 \mathfrak{a} \quad \text{bzw.} \quad \mathring{\mathfrak{c}} = \mathring{E}_1 \mathfrak{b} + \mathring{E}_2 \mathfrak{a}, \tag{8.20}$$

der polar zu $(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}')$ bzw. $(\mathring{\mathfrak{d}}, \mathring{\mathfrak{d}}')$ ist. Er bestimmt sich also aus

$$\langle \mathfrak{d}, E_1 \mathfrak{b}' + E_2 \mathfrak{a}' \rangle = 0 \tag{8.21}$$

bzw. aus [man benütze (6.6)]

$$\langle \mathfrak{d}, \mathring{E}_1 \mathfrak{b}' + \mathring{E}_2 \mathfrak{a}' - \mathring{E}_2 \mathfrak{d} \rangle = 0. \tag{8.22}$$

Können die Spiegelpunkte (und damit die ausgezeichneten Involutionen) zweier verschiedener Dv-Scharen zusammenfallen? Hierzu muß

$$\langle \tilde{\mathfrak{b}}, \mathfrak{d} \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{d} \rangle = 0 \tag{8.23}$$

sein. Die erste Aussage erlaubt den Ansatz (20) und die zweite führt dann auf (22). Somit ist also

$$\mathfrak{c} = E_0 \mathring{\mathfrak{c}}. \tag{8.24}$$

Die Spiegelpunkte einer zweiten Dv-Schar fallen dann und nur dann mit denen der Ausgangsschar zusammen, falls die Berührstellen die Medianpunkte der Spiegelkurven in bezug auf die Asymptotenlinien sind. Die Dv-Scharen mit denselben Spiegelpunkten wie die Ausgangsschar sind analytisch durch (2) mit (24) gegeben und hängen also von einer willkürlichen Funktion ab.

Insbesondere folgt aus diesem Satz: Die Dv-Scharen mit (6.3), was etwa bedeutet, daß die Mediankurven der Schmiegkurven mit den Spiegelkurven zusammenfallen, sind dadurch gekennzeichnet, daß *eine* Isogonalschar (etwa die konjugierte) mit der Ausgangsschar die Spiegelpunkte gemein hat. Gilt (6.3), so haben *alle* Isogonalscharen diese Eigenschaft. (Vgl. im übrigen Abschnitt 6.)

f) *Die Spiegelpunkte zueinander isogonaler Scharen im strengen Sinne (also* $D = \text{const}$*) gehören einer Involution an, in der auch die Medianpunkte der Schmiegkurven liegen.* Es ist ja nach (2) mit (16) und (17)

$$\mathfrak{b} \wedge \tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b} \wedge \left(\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2} (D - 1) \mathfrak{b}' \right). \tag{8.25}$$

In dieser Gesamtheit von Punktepaaren ist D projektiver Parameter. Es kennzeichnet $D=0$ das Paar der Involution, dessen Punkte die Fleknodalpunkte harmonisch trennen, $D=\infty$ die Medianpunkte der Schmiegkurven, D die Spiegelpunkte einer zweiten, $D=1$ die der Ausgangs-Dv-Schar. D gibt das Doppelverhältnis dieser vier Punktepaare in der genannten Reihenfolge an. Es folgt: *Das Paar der Involution, dessen Punkte die Fleknodalpunkte harmonisch trennen, trennt die Spiegelpunktepaare je zwei zueinander konjugierter Dv-Scharen von den Medianpunkten der Schmiegkurven harmonisch.*

Ein Paar der genannten Involution war uns bereits in Abschnitt 7 (7.32) begegnet. Es war dort das Punktepaar mit

$$D=3 \tag{8.26}$$

geometrisch gekennzeichnet worden.

Statt der Beziehung (25) hätte man auch die ursprünglichere

$$\tilde{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2}(D-1)\,\mathfrak{b}' \tag{8.27}$$

betrachten können. Sie sagt etwas mehr aus, nämlich etwa, daß *die Brennpunktepaare zusammengehörender konkordanter Geraden nach ihrer Projektion auf* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *mit den Fleknodalpunkten in einer Involution liegen.*

Beide Involutionen sind durch gleiche Werte von D projektiv aufeinander abgebildet. Man kann also die ausgesprochenen Sätze auch hier formulieren. Wir heben weiterhin hervor, daß *auf den Transversalgeraden durch einen Fleknodalpunkt, die zu den verschiedenen Isogonalscharen gehören, die Brennpunkte der konkordanten Kongruenz sich alle entsprechen, d.h.* [*vgl.* b)] *auf einer Geraden liegen, die* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *in einem Punkt trifft, der den betrachteten Fleknodalpunkt von den Schmiegstellen harmonisch trennt.*

g) Inwieweit bestimmen die Schmiegkurven eine schichtbildende Dv-Schar? Diese Schmiegkurven müssen der notwendigen Bedingung

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a})=0 \tag{8.28}$$

genügen, d.h. ihre Medianpunkte müssen die Fleknodalpunkte harmonisch trennen. Es sei also eine Dv-Schar mit (28) gegeben und wir fragen uns, ob unter den Isogonalscharen dieser Dv-Schar eine schichtbildende Dv-Schar existiert.

Hierzu muß nach (2)

$$\tilde{\mathfrak{a}}\equiv\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2}(D-1)\,\mathfrak{b}'\equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}} \tag{8.29}$$

sein. Sind die Schmiegkurven nicht Scharkurven — dann wären sie auch Asymptotenlinien — so ist nach (28) der Ansatz (6.22) gerechtfertigt und (29) führt auf

$$G+\tfrac{1}{2}(D-1)=0. \tag{8.30}$$

Man schließt: *Hat man ein Kurvenpaar einer Regelfläche, dessen Mediankurven erklärt sind und die Fleknodalkurven harmonisch trennen, so gibt es dazu eine eindeutig bestimmte schichtbildende Dv-Schar, deren Schmiegkurven das gegebene*

Kurvenpaar beschreiben. Oder: *Zwei verschiedene zueinander isogonale Dv-Scharen können nur dann beide schichtbildend sein, falls die Schmiegkurven der Schar angehören. Dann sind diese aber Geraden* [vgl. Abschnitt 5 d)].

h) Die Torsallinien der konkordanten Kongruenz findet man nach (2.16) aus

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \equiv \tfrac{1}{2}\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle + \tfrac{1}{4}(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 = 0, \tag{8.31}$$

indem man diese Bedingung für eine beliebige Parameterverteilung ausschreibt. Nach (1.12), (1.14) ist dabei

$$2\langle \mathfrak{a}^*, \mathfrak{a}^*\rangle + (\alpha_{11}^* + \alpha_{22}^*)^2 = 2\langle \mathfrak{a} - A\,\mathfrak{b}, \mathfrak{a} - A\,\mathfrak{b}\rangle + [\alpha_{11} + \alpha_{22} + 2A' - 2A^2]^2. \tag{8.32}$$

Die Torsallinien bilden die konkordanten Geraden der Berührquadriken genau dann projektiv aufeinander ab, wenn (32) in zwei RICCATIsche Differentialgleichungen für A' zerfällt. Hierfür ist

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle = 0$$

kennzeichnend (vgl. 4.15): *Die Torsallinien der konkordanten Kongruenz bilden die konkordanten Geraden der Berührquadriken genau dann projektiv aufeinander ab, wenn die Brennflächen der konkordanten Kongruenz von einer Geraden und einem Kegelschnitt oder von zwei Geraden erzeugt werden.*

Können die Torsallinien der konkordanten Kongruenzen zweier verschiedener Dv-Scharen derselben Regelfläche zusammenfallen? Hierzu müßte

$$2\langle \tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}\rangle + (\tilde{\alpha}_{11} + \tilde{\alpha}_{22})^2 = 0 \tag{8.33}$$

nach Übergang auf eine allgemeine Parameterverteilung dieselbe Differentialgleichung in A' darstellen, wie (32). Nun tritt A' nur in die Größe $\alpha_{11} + \alpha_{22}$ ein. Eliminiert man also $\alpha_{11} + \alpha_{22}$ aus (31) und (33), so ist das Eliminationsergebnis nach Transformation auf allgemeine Parameter ein Polynom in A, das identisch verschwinden muß. Man sieht nun sofort, daß der Koeffizient der höchsten Potenz in A die Größe $\langle \mathfrak{b} + \tilde{\mathfrak{b}}, \mathfrak{c}\rangle$ ist, d.h. es muß

$$\langle \mathfrak{b} + \tilde{\mathfrak{b}}, \mathfrak{c}\rangle = 0 \tag{8.34}$$

sein. Daraus folgt [vgl. (13)]: *Die Torsallinien der konkordanten Kongruenzen zweier verschiedener Dv-Scharen stimmen höchstens dann überein, wenn auch die* CARTAN*schen Parameter übereinstimmen.*

In diesem Fall liefert die Elimination von $\alpha_{11} + \alpha_{22}$ aus (31) und (33) unmittelbar

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle = \langle \tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}\rangle,$$

und dies kann man nach (2) unter Beachtung von (6.6) in der Form

$$\langle \mathring{\mathfrak{c}}, (\mathring{\mathfrak{b}} + \mathring{\tilde{\mathfrak{b}}})' + \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}\rangle = 0$$

schreiben. Gehen wir hier auf eine allgemeine Parameterverteilung über, so wird unter Beachtung von (34)

$$\langle \mathring{\mathfrak{c}}', (\mathring{\mathfrak{b}} + \mathring{\tilde{\mathfrak{b}}})' + \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}\rangle + A\,\langle \mathring{\mathfrak{c}}, \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}\rangle = 0. \tag{8.35}$$

Also: *Die Torsallinien zweier verschiedener konkordanten Kongruenzen stimmen höchstens dann überein, falls die Berührstellen die Fleknodalpunkte harmonisch trennen.* Im allgemeinen ist dies jedoch zusammen mit (34) noch nicht hinreichend.

Unter den Isogonalscharen einer Dv-Schar kommt bei $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle \neq 0$ nur die konjugierte für unsere Fragestellung in Betracht. Hier ist $\mathfrak{b} + \tilde{\mathfrak{b}} = 0$ und (35) sagt aus: *Die Torsallinien der konkordanten Kongruenzen zweier konjugierter Dv-Scharen fallen genau dann zusammen, wenn die Fleknodalkurven die Mediankurven der Schmiegkurven sind.*

9. a) Wir sahen bereits, daß die hyperbolische Bewegung der Hilfsebene eine Dv-Schar bis auf asymptotenlinienerhaltende Abbildungen der Regelfläche festlegt. Nun übertragen sich noch andere Größen einer Dv-Schar auf einer konkret vorgegebenen Regelfläche in das hyperbolische Bild (wir knüpfen an Abschnitt 3 an, vgl. die Figur 2, S. 63), z.B. die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ — charakterisiert durch das Bild der Spiegelpunkte $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}$ — und das Bild der Fleknodalpunkte $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}$. *Diese Größen sind invariant gegenüber Projektivabwicklung der die Dv-Schar tragenden Regelfläche.* Man entnimmt das den Beziehungen (8.2), indem man als Ausgangsschar die Asymptotenlinien verwendet ($\mathfrak{b}_0 = 0$) und beachtet, daß dann die Halbinvariante $\mathfrak{a}_0$ die Regelfläche bezogen auf ihre Asymptotenlinien bis auf Projektivabwicklung kennzeichnet.

Umgekehrt legt die Kenntnis des Vektors $\mathfrak{a}$ in Abhängigkeit des invarianten Parameters der hyperbolischen Bewegung die Dv-Schar bis auf Projektivabwicklung der Regelfläche fest. Wie kann man dies geometrisch fassen?

Gegeben sei eine hyperbolische Bewegung in Abhängigkeit von t. In der bewegten Ebene sei ferner eine beliebige Kurve $\tilde{\mathfrak{f}}_0$ gegeben und eine weitere Kurve $\mathfrak{d}_0$, deren Punkte zu den jeweils zugehörigen momentanen Fixpunkten der Bewegung $\mathfrak{b}$ polar sind. Es sei $\mathfrak{d}_0$ weder zu $\mathfrak{b}'$ noch zu $\tilde{\mathfrak{f}}_0$ polar. — Hierdurch ist eine Dv-Schar bis auf Projektivabwicklung der Regelfläche eindeutig festgelegt, die in der Schar der Asymptotenlinien die hyperbolische Bewegung definiert und die $\tilde{\mathfrak{f}}_0$ als hyperbolisches Bild der Fleknodalpunkte bzw. $\mathfrak{d}_0$ als Bild der Spiegelpunkte besitzt.

Auf Grund der gemachten Voraussetzungen ist nämlich bei jeder Parameterverteilung mit einer geeigneten Funktion f

$$f \tilde{\mathfrak{f}}_0 = \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}. \tag{9.1}$$

f bestimmt sich dann aus

$$\langle 2\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_0 \rangle = \langle \mathfrak{b}' - f \tilde{\mathfrak{f}}_0, \mathfrak{d}_0 \rangle = 0, \tag{9.2}$$

so daß (1) den Vektor $\mathfrak{a}$ in Abhängigkeit von t angibt. $\mathfrak{a}$ zeigt dann bei Parametertransformation zwangsläufig das richtige Transformationsverhalten.

Auf diese Weise sind natürlich nur Dv-Scharen zu konstruieren, bei denen die Spiegelpunkte erklärt und von den Medianpunkten der Schmiegkurven verschieden sind. Um auch die ausgeschlossenen Fälle zu erfassen, sprechen wir zunächst von den schichtbildenden Dv-Scharen.

Gegeben sei eine hyperbolische Bewegung in Abhängigkeit von t. In der bewegten Ebene sei ferner auf der Tangente an den Ort der momentanen Fixpunkte für jedes t ein Punkt, d.h. eine Kurve $\mathfrak{f}_0(t)$ gegeben, wobei $\mathfrak{f}_0$ von $\mathfrak{b}$ verschieden vorausgesetzt sei für jedes t. Hierdurch ist eine schichtbildende Dv-Schar bis auf Projektivabwicklung der Regelfläche eindeutig festgelegt, die in der Schar der Asymptotenlinien die hyperbolische Bewegung definiert und das hyperbolische Bild der Fleknodalpunkte $\mathfrak{f}_0$ besitzt.

Man mache auch hier den Ansatz (1) und setze $\mathfrak{f}_0$ in der normierten Gestalt

$$\mathfrak{f}_0 \equiv \mathfrak{b}' \pmod{\mathfrak{b}} \tag{9.3}$$

an. Dies ist immer möglich, wenn die Schmiegkurven nicht Scharkurven sind. Dann ist

$$2\mathfrak{a} \equiv (1 - f)\,\mathfrak{b}' \pmod{\mathfrak{b}} \tag{9.4}$$

und also führt die Bedingung für schichtbildende Dv-Scharen

$$2\mathfrak{a} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}}$$

auf

$$f = 1.$$

Es bleibt noch von den nichtschichtbildenden Dv-Scharen zu sprechen, *bei denen die Mediankurven der Schmiegkurven mit den Spiegelkurven zusammenfallen.* Sie genügen zusammen mit den schichtbildenden Dv-Scharen der kennzeichnenden Bedingung

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = 0. \tag{9.5}$$

Wir sahen [Abschnitt 8g)], daß mit diesen immer eine eindeutig bestimmte schichtbildende Isogonalschar verknüpft ist, die mit der betrachteten Schar ein wohldefiniertes Doppelverhältnis $D(t)$ bildet.

Geben wir also zusätzlich eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion $D_0(t)$ vor, so gibt es eine bis auf Projektivabwicklung eindeutig bestimmte Dv-Schar (5), *mit der die schichtbildende Isogonalschar das Doppelverhältnis $D_0(t)$ bildet.*

Hier bestimmt sich f, wie der Vergleich von (4) mit (6.22) und (8.30) lehrt, aus

$$f = D_0(t).$$

Die Vorgaben legen also wieder, wie behauptet, den Vektor $\mathfrak{a}$ eindeutig fest.

In Abschnitt 7 haben wir uns bemüht, auch die Größe $\alpha_{11} + \alpha_{22}$, die nicht mehr invariant gegenüber Projektivabwicklung der Regelfläche ist, in das hyperbolische Bild zu übertragen. Hierzu hatten wir die Kegelschnitte $\mathfrak{n}^*$ und $\bar{\mathfrak{n}}^*$ [vgl. (7.21), (7.27)] betrachtet. Man gewinnt so die Möglichkeit, eine Dv-Schar nicht nur bis auf Projektivabwicklung, sondern vollständig durch ihr hyperbolisches Bild zu kennzeichnen. Es genügt dazu bereits, die Schnittpunkte dieser Kegelschnitte mit der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ [vgl. (7.36)] zu benützen.

b) Mit einem Kurvenpaar in einer Dv-Schar läßt sich auf zwei Arten eine Dv-Schar invariant verknüpfen, die die Kurven als Scharkurven enthält [vgl. Abschnitt 6e)]. Da gegenüber Projektivabwicklung einer Regelfläche außer den Asymptotenlinien auch die Fleknodalkurven invariant sind, so gilt das gleiche für die mit diesen verknüpfbaren Dv-Scharen. Besondere Bedeutung hat die *Prinzipalschar der Regelfläche.* Das ist die Prinzipalschar der Fleknodalkurven in der Dv-Schar der Asymptotenlinien [vgl. 6e)].

Identifizieren wir die Ausgangs-Dv-Schar mit der Prinzipalschar einer Regelfläche und verwenden als Basisvektoren die Fleknodalkurven. Dann gilt also [vgl. (6.17)]

$$\beta_{12}\beta'_{21} - \beta_{21}\beta'_{12} = 0 \tag{9.6}$$

und außerdem

$$\beta'_{12} - 2\alpha_{12} = \beta'_{21} - 2\alpha_{21} = 0. \tag{9.7}$$

Ohne Spezialisierung des Bezugssystems *ist eine Dv-Schar genau dann Prinzipalschar der sie tragenden Regelfläche, wenn*

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'') = (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}) \wedge (\mathfrak{b}'' - 2\mathfrak{a}') = 0 \tag{9.8}$$

ist. Die Prinzipalscharen sind also spezielle Typen der uns mehrfach aufgefallenen Dv-Scharen mit (5) (vgl. insbesondere Abschnitt 6).

Bei diesen Dv-Scharen mit (5) und damit auch bei den Prinzipalscharen gilt nun: *Sind die Schmiegstellen einer solchen Dv-Schar verschieden, so wird die Brennfläche der konkordanten Kongruenz entweder von Kurven dritter Ordnung oder von Geraden erzeugt.* Dies heißt also, daß wir bei den Prinzipalscharen im Hinblick auf die konkordante Kongruenz neben dem allgemeinen Fall hauptsächlich die schichtbildenden Dv-Scharen zu betrachten haben.

Beachten wir dann noch, daß die Vorgabe des hyperbolischen Bildes des ausgezeichneten Kurvenpaares die zu der Prinzipalschar gehörende Bewegung festlegt, so kommen wir zu dem folgenden Satz: *Eine Regelfläche ist bis auf Projektivabwicklung eindeutig festgelegt durch Vorgabe des hyperbolischen Bildes der Fleknodalkurven in der Schar der Asymptotenlinien und durch Vorgabe des Wertes $D_0(t)$ des Doppelverhältnisses, das die schichtbildende Isogonalschar mit der Prinzipalschar bildet. Mit $D_0(t) = 1$ sind die schichtbildenden Prinzipalscharen selbst erfaßt. Es gibt zu diesen Vorgaben immer eine Regelfläche.* Dabei sind die Fleknodalkurven allerdings als verschieden voneinander vorauszusetzen.

Auf eine nähere Diskussion der Prinzipalscharen vom Standpunkt der Theorie der Dv-Scharen aus, die für die Theorie der Regelflächen von Interesse wäre, wollen wir hier nicht eingehen.

Freiburg i. B., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 15. Dezember 1954.)

Künzi, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 94—98 (1955)

Zwei Beispiele zur Wertverteilungslehre.

Von
Hans Künzi.

Einleitung.

In verschiedenen Arbeiten haben Ullrich [6], [7], [8], Wittich [9], [10], [11], [12], Pöschl [5] und der Verfasser [2], [3], [4] gezeigt, wie man die Wertverteilung für bestimmte analytische Funktionen berechnen kann, für den Fall, daß die Riemannsche Fläche W durch einen Streckenkomplex dargestellt ist. So wurden in den letzten Jahren vor allem Riemannsche Flächen untersucht, deren Streckenkomplexe endlich viele einfach- und doppeltperiodische Enden aufwiesen. Zwischen je zwei solchen Enden befindet sich bekanntlich ein logarithmisches Elementargebiet. In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich zuerst mit einem Beispiel befassen, bei dem ein doppeltperiodisches Ende mit einer bestimmten asymmetrischen Berandung versehen wird. Einen derartigen Komplex kann man auch als ein doppelt-periodisches Ende auffassen, an den direkt, also ohne Dazwischenschaltung eines logarithmischen Elementargebietes, zwei einfachperiodische Enden grenzen.

Beispiel 2 zeigt, wie man 4 Viertelsenden zu einem Komplex, der überhaupt kein logarithmisches Elementargebiet aufweist, zusammenfügen kann.

Es würde zu weit führen, in dieser Arbeit die notwendigen Uniformisierungsmethoden anzugeben, wir können uns aber dafür auf die ausführlichen Arbeiten [2], [3] beziehen. Über die Theorie von Viertelsenden vergleiche man meine Arbeiten [3], [4].

Im weiteren möchte ich noch erwähnen, daß ich mich vor einigen Jahren mit Herrn Pöschl mündlich über die Möglichkeit derartiger Flächenkonstruktionen unterhalten habe.

Erstes Beispiel.

Die Fläche W ist gegeben durch den Streckenkomplex S, die Lage der Grundpunkte $a_1 \dots a_4$, sowie die Zerschneidungskurve c. Vergleiche hierzu Elfving [1] und Künzi [3].

Aus den früheren Untersuchungen [3] geht hervor, daß sämtliche Defekte $\delta(a_k)$ $(k = 1, \dots, 4)$ verschwinden. Auch ist leicht einzusehen, daß die asymmetrische Berandung in unserem Beispiel die Verzweigungsindizes nicht beeinflußt, also gilt auch hier: $\varepsilon(a_k) = \frac{1}{2}$ $(k = 1, \dots, 4)$.

Ohne die angebrachte Berandung hätte die Fläche die Ordnung $\lambda = 2$. Um die neue Ordnung unserer Fläche zu bestimmen, müssen wir diese zweckmäßig uniformisieren.

Daß wir uns speziell bei den folgenden Betrachtungen an das Beispiel der Fig. 1 halten, schränkt die Allgemeinheit der in der Einleitung erwähnten Flächenklasse nicht ein.

In einem ersten Schritt stanzen wir durch einen Kreis den logarithmischen Windungspunkt, der über a_2 liegt, aus der Fläche heraus und uniformisieren diesen durch die Logarithmusfunktion in eine Halbebene. Diese Halbebene denken wir uns in eine z-Ebene gelegt mit $\mathrm{Re}\, z < 0$.

In einem zweiten Schritt schneiden wir den doppeltperiodischen Teil längs einer bestimmten Gliederfolge — 1 — 3 — 1 — 3 — 1 — aus der Fläche heraus und bilden diesen durch ein elliptisches Integral ebenfalls in eine z Halbebene mit $\mathrm{Re}\, z > b$ $(b > 0)$. Um eine geradlinige Begrenzung zu erhalten, sind einfache quasikonforme Abbildungen nötig (vgl. [2], [3]).

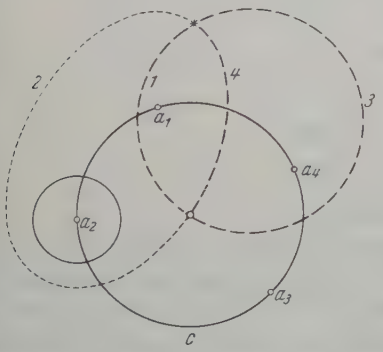

Fig. 1.

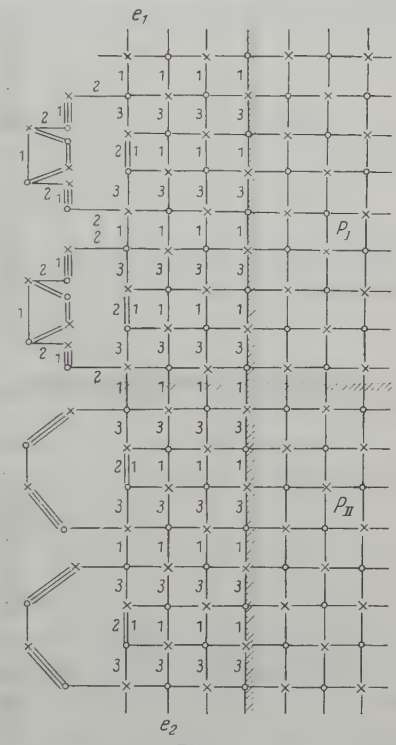

Fig. 2.

Die beiden Streifenenden e_1 und e_2 im Streckenkomplex dürfen wir als Teile einfachperiodischer Enden auffassen, die sich mit den entsprechenden Umkehrfunktionen von $w_\mu = R(e^z)$ $(\mu = 1, 2)$ in 2 Halbstreifen uniformisieren lassen. Mit bestimmten konformen und quasikonformen Abbildungen können wir die beiden Halbstreifen so in Parallelstreifen der Breite b überführen, daß sich der erste, der dem Ende e_1 entspricht, längs einer seiner Berandungen mit der entsprechenden Berandung $\mathrm{Re}\, z = b$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ von z identifizieren läßt und desgleichen die eine Berandung des zweiten Parallelstreifens mit $\mathrm{Re}\, z = b$, $\mathrm{Im}\, z < 0$ von z.

Um die beiden Halbebenen $\mathrm{Re}\, z > 0$ und $\mathrm{Re}\, z < 0$ miteinander zu verheften, müssen wir zuerst auf $\mathrm{Re}\, z < 0$ die Ähnlichkeitstransformation

$$Z = \frac{\omega_1}{\omega_1'} \cdot z$$

ausführen. ω_i, ω_i' bezeichnen die Anzahl der linken bzw. rechten berandenden Innenknoten einer Periode von e_i[1]).

Durch eine weitere quasikonforme Abbildung von $\mathrm{Re}\, z > 0$ auf $\mathrm{Re}\, Z > 0$ lassen sich die beiden Z-Halbebenen längs der positiven imaginären Achse identifizieren. Zum Schluß ist das Z-Blatt noch längs der negativen imaginären Achse zu verheften. Dazu dient die Spiralabbildung

$$\zeta = Z^{a+ib}.$$

Aus (3) entnehmen wir für die Konstanten die Werte $a = 1$ und $b = -\frac{\log A}{2\pi}$ mit

$$A = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_1' \cdot \omega_2'}.$$

Ein Kreis mit dem Radius $|\zeta| = \varrho$ entspricht in der Z-Ebene einer Spirale zwischen $|Z| = \varrho^\beta$ und $|Z| = A\,\varrho^\beta$ mit

$$\beta = 1 + \left(\frac{\log A}{2\pi}\right)^2.$$

Daraus schließt man nach [3] für die neue Ordnung

$$\lambda = 2\beta.$$

Also in unserem Beispiel

$$\lambda = 2\left[1 + \left(\frac{\log \frac{3}{5}}{2\pi}\right)^2\right] = 2{,}02415\ldots.$$

Zweites Beispiel.

Wie in Beispiel 1 werden die 4 doppeltperiodischen Gebiete $P_{\mathrm{I}}, \ldots, P_{\mathrm{IV}}$ aus der Riemannschen Fläche herausgeschnitten und nachher in 4 schlichte Gebiete $z_{P_{\mathrm{I}}}, \ldots, z_{P_{\mathrm{IV}}}$ einer z-Ebene uniformisiert. Die übrigbleibenden Streifen $e_1, \ldots, e_4$ fassen wir als Teile einfachperiodischer Enden auf. Die ihnen entsprechenden Flächenstücke werden mit Hilfe bestimmter Umkehrfunktionen von $w = R(e^z)$ in Halbstreifen abgebildet. Vor der Verheftung der 4 Gebiete $z_{P_{\mathrm{I}}}, \ldots, z_{P_{\mathrm{IV}}}$ mit den Halbstreifen müssen diese zuerst wieder ähnlich transformiert werden nach

$$Z_{\mathrm{I}} = z_{P_{\mathrm{I}}}, \quad Z_{\mathrm{II}} = \frac{\omega_1}{\omega_1'} z_{P_{\mathrm{II}}}, \quad Z_{\mathrm{III}} = \frac{\omega_1}{\omega_1'} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2'} z_{P_{\mathrm{III}}}, \quad Z_{\mathrm{IV}} = \frac{\omega_1}{\omega_1'} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2'} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_3'} z_{P_{\mathrm{IV}}}.$$

Mit den in [3] angegebenen quasikonformen Abbildungen lassen sich jetzt die vier Gebiete $Z_{\mathrm{I}}, \ldots, Z_{\mathrm{IV}}$ verheften. Die Punkte längs der positiven reellen Achse sind zu identifizieren durch die Spiralabbildung

$$\zeta = Z^{1 - \frac{\log A}{2\pi}}$$

mit

$$A = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_4}{\omega_1' \cdot \omega_2' \cdot \omega_3' \cdot \omega_4'}.$$

[1]) Die rechte bzw. linke Berandung eines Endes wird vom Kern aus bestimmt.

Wie im ersten Beispiel geht ein Kreis mit $|\zeta| = \varrho$ in eine Spirale der Z-Ebene über zwischen $|Z| = \varrho^\beta$ und $|Z| = A\varrho^\beta$ mit

$$\beta = 1 + \left(\frac{\log A}{2\pi}\right)^2.$$

Für die Ordnung ergibt sich dadurch entsprechend wie im ersten Beispiel:

$$\lambda = 2\beta = 2\left\{1 + \left(\frac{\log A}{2\pi}\right)^2\right\}.$$

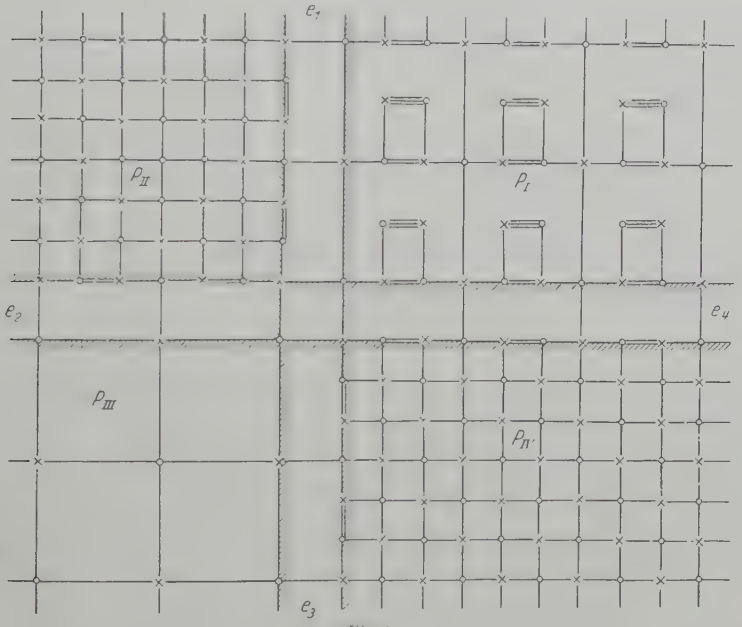

Fig. 3.

Für das Beispiel der Fig. 3 gilt:

$$\omega_1 = 1 \quad \omega_2 = 2 \quad \omega_3 = 3 \quad \omega_4 = 1$$
$$\omega_1' = 1 \quad \omega_2' = 3 \quad \omega_3' = 3 \quad \omega_4' = 3$$
$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{2} \qquad \lambda = 2 \cdot \beta \qquad \beta = 1 + \left(\frac{\log \frac{1}{2}}{2\pi}\right)^2$$
$$\lambda = 2\left\{1 + \left(\frac{\log \frac{1}{2}}{2\pi}\right)^2\right\} = 2{,}02433\ldots.$$

In einer späteren Arbeit werden wir auch auf die Berechnung der Verzweigungsindizes bei derartigen Flächen eingehen.

Literatur.

[1] Elfving, G.: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformierung. Acta Soc. Sci. Fennicae, N.S. **2**, Nr. 3 (1934). — [2] Künzi, H.: Über ein Teichmüllersches Wertverteilungsproblem. Arch. Math. **4**, 210—215 (1953). — [3] Künzi, H.:

Neue Beiträge zur Wertverteilungslehre. Comm. Math. Helv. **29**, Heft 3 (1955). — [4] KÜNZI, H.: Konstruktion Riemannscher Flächen mit vorgegebener Ordnung der erzeugenden Funktion. Math. Ann. **128**, 471—474 (1955). — [5] PÖSCHL, K.: Über die Wertverteilung der erzeugenden Funktionen mit endlich vielen periodischen Enden. Math. Ann. **123**, 79—95 (1951). — [6] ULLRICH, E.: Zum Umkehrproblem der Wertverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. **1**, Nr. 9 (1936). — [7] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jahresber. dtsch. Math. Ver. **46**, 232—273 (1936). — [8] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wertverteilung. 9. Congr. Math. scand. Helsinki 1938, 179—200. — [9] WITTICH, H.: Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen. Math. Z. **45**, 642—668 (1939). — [10] WITTICH, H.: Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion. Math. Z. **51**, 1—16 (1947). — [11] WITTICH, H.: Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Z. **51**, 278—288 (1948). — [12] WITTICH, H.: Über den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung. Math. Ann. **122**, 37—46 (1950).

Math. Inst., Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich (Schweiz).

(Eingegangen am 6. Dezember 1954.)

Bagemihl, F., and W. Seidel
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 99—110 (1955)

A problem concerning cluster sets of analytic functions.

By
F. Bagemihl and W. Seidel.

§ 1. The present paper is closely related to a recent paper[1]) of ours which we shall refer to in the sequel as "BP". We shall retain some of the notation and terminology employed in BP.

The general problem which we shall consider here arises in the following way. Let us suppose that $f(z)$ is a regular function in $|z|<1$. For every $e^{i\vartheta}$, denote by $C(\vartheta)$ the cluster set[2]) of $f(z)$ on the radius of $|z|<1$ terminating in $e^{i\vartheta}$. It is easy to show that $C(\vartheta)$ is a continuum[3]) in the extended complex plane (or on the Riemann sphere)[4]). *How can one characterize the set of continua* $\{C(\vartheta): 0\leq\vartheta\leq 2\pi\}$, *or the set of continua* $\{C(\vartheta):\vartheta\in M\}$, *where* M *is some perfect, nowhere dense subset of the interval* $0\leq\vartheta\leq 2\pi$, *or some* F_σ *of first category in this interval?*

In attempting to answer this question, it is natural to consider the subcontinua of the Riemann sphere as points of a suitable space. Let $\mathcal{X}$ denote the Riemann sphere. If a and b are points of $\mathcal{X}$, define the distance $\varrho(a, b)$ to be the ordinary Euclidean distance between a and b. With this metric, $\mathcal{X}$ is obviously a compact, metric space. Let $2^{\mathcal{X}}$ be the space of all closed, non-empty subsets of $\mathcal{X}$, and define[5]) the distance between two points, X and Y, of $2^{\mathcal{X}}$ as follows:

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \max\Big(\sup_{x\in X}\varrho(x, Y), \sup_{y\in Y}\varrho(X, y)\Big).$$

With this metric, $2^{\mathcal{X}}$ is a compact, metric space[6]). Consider the subspace, $\mathfrak{L}$, of $2^{\mathcal{X}}$, consisting of all subcontinua of $\mathcal{X}$. Since $\mathfrak{L}$ is closed in $2^{\mathcal{X}}$, $\mathfrak{L}$ is a compact, metric space[7]), and hence is also complete and separable[8]).

Returning now to the cluster set $C(\vartheta)$, we see that it may be regarded as a point in the space $\mathfrak{L}$; and, for any set, M, of points on the circumference

[1]) Bagemihl, F., u. W. Seidel: *Some boundary properties of analytic functions.* Math. Z. **61**, 186—199 (1954).

[2]) For a definition of this term, see, *e.g.*, BP, p. 186, footnote [1]).

[3]) A single point will (but the empty set will not) be regarded as a continuum and also as a locally connected continuum (for a definition of locally connected continuum, see, *e.g.*, Hausdorff, F.: *Mengenlehre*, 2. ed., pp. 150, 155. Berlin u. Leipzig 1927).

[4]) The proof of this fact appears incidentally in the proof of Theorem 1 below.

[5]) *Cf.* Kuratowski, C.: *Topologie II.* Warszawa-Wrocław, 1950, p. 20.

[6]) *Ibid.*, p. 21, I, 1.

[7]) *Ibid.*, p. 110, 4; p. 3, III, 1.

[8]) *Ibid.*, p. 2, 1; p. 3, II, 4.

$|z| = 1$, the corresponding set $\{C(\vartheta) : e^{i\vartheta} \in M\}$ is a set of points in the space $\mathfrak{L}$. We are going to show (see Theorem 1 and Remark 2) that if $f(z)$ is a continuous function in $|z| < 1$, mapping $|z| < 1$ into $\mathfrak{X}$, and M is an analytic set on $|z| = 1$, then $\{C(\vartheta) : e^{i\vartheta} \in M\}$ is an analytic set in $\mathfrak{L}$. In Theorems 2 and 3, we prove, *e.g.*, that for some simple sets M there exist regular functions, $f(z)$, in $|z| < 1$, such that the corresponding set $\{C(\vartheta) : e^{i\vartheta} \in M\}$ is an analytic set, but not a BOREL set, in $\mathfrak{L}$. We conjecture that if A is a non-empty analytic set in $\mathfrak{L}$, then, if M is, *e.g.*, a perfect, nowhere dense subset of $|z| = 1$, there exists a regular function $f(z)$ in $|z| < 1$, for which $\{C(\vartheta) : e^{i\vartheta} \in M\} = A$. We shall show (*cf.* Theorem 5) that this is true for a particular A, namely, the set of all locally connected subcontinua of $\mathfrak{X}$; this set A is known[9]) to be an $F_{\sigma\delta}$ in $\mathfrak{L}$. Theorem 4 is our basic result in this direction, and Theorem 6 presents a condensation of the phenomenon described in Theorem 5.

§ 2. We shall assume, in what follows, that $0 < R \leqq +\infty$. Our results will usually be stated for $|z| < R$ instead of the unit circle, and for more general paths than radii, namely, for mb-paths[10]).

Theorem 1. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress*[11]) *in $|z| < R$, relative to E, $f(z)$ be a continuous mapping of $|z| < R$ into $\mathfrak{X}$, and $C(\tau)$, for every $\tau \in E$, be the cluster set of $f(z)$ on t_τ. Then $\{C(\tau) : \tau \in E\}$ is an analytic set in $\mathfrak{L}$.*

Proof. Let $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k < \cdots < R$ and $\lim_{k\to\infty} r_k = R$. For every $\tau \in E$ and every natural number k, denote by $A_k(\tau)$ the image, under $f(z)$, of the intersection of t_τ with the ring $r_k \leqq |z| \leqq r_{k-1}$; $A_k(\tau)$, as a locally connected subcontinuum[12]) of $\mathfrak{X}$, is an element of $\mathfrak{L}$. It is a simple matter to verify that

$$C(\tau) = \overset{\sim}{\bigcap_{k=1}} \overline{\overset{\sim}{\bigcup_{n=k}} A_n(\tau)}, \quad (\tau \in E). \tag{1}$$

If j, k are natural numbers, and $\tau \in E$, let us set

$$B_{k,j}(\tau) = A_k(\tau) \cup A_{k+1}(\tau) \cup \cdots \cup A_{k+j}(\tau); \tag{2}$$

$B_{k,j}(\tau)$, as a locally connected subcontinuum[12]) of $\mathfrak{X}$, is an element of $\mathfrak{L}$.

Suppose that $\tau \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$. Then it follows[13]) from BP, p. 195, Definition 2 and p. 186, Definition 1, as well as from the uniform continuity of $f(z)$ in the ring $r_k \leqq |z| \leqq r_{k+j}$, that $B_{k,j}(\tau)$, considered as a function of τ,

[9]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques.* Fundamenta Mathematicae **17**, 249—272 (1931), pp. 269—270.

[10]) For a definition of this term, see BP, p. 186.

[11]) See BP, p. 195, Definition 2.

[12]) That it is a locally connected continuum follows, *e.g.*, from HAUSDORFF, F.: *loc. cit.* [3]), pp. 207, 200.

[13]) Note HAUSDORFF, F.: *loc. cit.* [3]), p. 196, III.

mapping $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$ into $\mathfrak{L}$, is continuous for every j. Furthermore, it is evident that

$$B_{k,j}(\tau) \subseteqq B_{k,j+1}(\tau), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hence[14]), $\lim_{j\to\infty} B_{k,j}(\tau)$ exists—call it $B_k(\tau)$—and is[15]) an element of $\mathfrak{L}$; moreover[14]),

$$B_k(\tau) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}(\tau)}. \tag{3}$$

Since $B_k(\tau)$, regarded as a function of $\tau \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$, is the limit[16]) of a sequence of continuous functions, it is a function of BAIRE class $\leqq 1$ on $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$, and can be extended[17]) to a function, $B_k^*(\tau)$, of BAIRE class $\leqq 1$ on $|\tau| = 1$, and hence, in particular, on E.

Now let $\tau \in E$, and suppose that k is the smallest natural number for which $\tau \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$. From (2) and (3) we see that

$$B_m(\tau) \supseteqq B_{m+1}(\tau), \qquad (m = k,\ k+1,\ k+2, \ldots),$$

and hence[18]) $\lim_{m\to\infty} B_m(\tau)$ exists and is obviously the same as $\lim_{m\to\infty} B_m^*(\tau)$. If we bear in mind that $\overline{B_m(\tau)} = B_m(\tau)$ $(m = k, k+1, k+2, \ldots)$, and note (3), (2), and (1), it is clear that[18])

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} B_m^*(\tau) &= \bigcap_{m=k}^{\infty} B_m(\tau) \\ &= \bigcap_{m=k}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j(\tau)} \\ &= C(\tau). \end{aligned}$$

Thus[19]) $C(\tau) \in \mathfrak{L}$, and $C(\tau)$, regarded as a function of $\tau \in E$, is of BAIRE class $\leqq 2$, so that[20]) $\{C(\tau) : \tau \in E\}$ is an (absolute) analytic set, and the proof of our theorem is complete.

Remark 1. Theorem 1 holds, in particular, if $f(z)$ is regular or meromorphic in $|z| < R$.

Remark 2. If we consider the statement of the theorem referred to in footnote[20]), the proof of Theorem 1 shows that if we consider, instead of the tress $\mathcal{T}$, *e.g.*[21]) any set of radii in $|z| < R < +\infty$ terminating in an analytic set (in particular, the set $|z| = R$ itself) on $|z| = R$, then the set of cluster sets of $f(z)$ on these radii is an analytic set in $\mathfrak{L}$. (An analogous result is valid, of course, for $|z| < +\infty$.)

[14]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *Topologie I*, 2d ed., Warszawa-Wrocław, 1948, p. 245, 7.
[15]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.* [5]), p. 111, 6.
[16]) We make use here of KURATOWSKI, C.: *ibid.*, p. 21, 2.
[17]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.* [14]), p. 341.
[18]) *Ibid.*, p. 245, 8.
[19]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.* [5]), p. 110, 5.
[20]) See HAUSDORFF, F.: *loc. cit.* [3]), p. 269, XIII.
[21]) *Cf.* Remark 8 on p. 199 of BP.

§ 3. The next two theorems show that, in general, it is not possible to replace the phrase "an analytic set" in Theorem 1 by "a BOREL set".

Theorem 2. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress*[11]) *in $|z| < R$, relative to E, where E is of power $2^{\aleph_0}$. Then there exists a regular function, $f(z)$, in $|z| < R$, such that, if $C(\tau)$, for every $\tau \in E$, is the cluster set of $f(z)$ on t_τ, then $\{C(\tau) : \tau \in E\}$ is an analytic set, but not a* BOREL *set, in $\mathfrak{Q}$.*

Proof. Let[22]) A be an analytic subset of $\mathcal{X}$ which is not a BOREL set in $\mathcal{X}$. Then, according to BP, p. 198, Theorem 9, there exists a regular $f(z)$ in $|z| < R$, for which $\{C(\tau) : \tau \in E\} = A$. Since A is an absolute analytic set[23]), A is an analytic set in $\mathfrak{Q}$. If A were a BOREL set in $\mathfrak{Q}$, A would be an absolute BOREL set[24]), and hence also a BOREL set in $\mathcal{X}$, contradicting the definition of A. Therefore A is not a BOREL set in $\mathfrak{Q}$.

Theorem 3. *There exists a regular function, $f(z)$, in $|z| < R$, such that, if $C(\vartheta)$ denotes the cluster set of $f(z)$ on the radius*[25]) *$\arg z = \vartheta$ in $|z| < R$, then $\{C(\vartheta) : 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ is an analytic set, but not a* BOREL *set, in $\mathfrak{Q}$.*

Proof. Let V be a perfect, nowhere dense subset of the interval $0 \leq \vartheta \leq \pi$, and[22]) A be an analytic subset of $\mathcal{X}$ which is not a BOREL set in $\mathcal{X}$. Then, according to the sufficiency part of the proof of BP, p. 198, Theorem 10 (bear in mind BP, p. 193, Remark 3), there exists a regular $f(z)$ in $|z| < R$ for which $\{C(\vartheta) : \vartheta \in V\} = A$, whereas, for every ϑ satisfying $0 \leq \vartheta < 2\pi$ and $\vartheta \notin V$, $C(\vartheta) = \mathcal{X}$. Thus, in $\mathfrak{Q}$, $\{C(\vartheta) : 0 \leq \vartheta < 2\pi\} = A \cup \{\mathcal{X}\}$, which is an absolute analytic set[26]). If it were a BOREL set in $\mathfrak{Q}$, A would also be[27]) a BOREL set in $\mathfrak{Q}$, and therefore, as an absolute BOREL set[24]), a BOREL set in $\mathcal{X}$, contradicting the definition of A. Consequently, $\{C(\vartheta) : 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ is not a BOREL set in $\mathfrak{Q}$.

§ 4. Theorem 4. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress*[11]) *in $|z| < R$, relative to E, satisfying the condition*[28]) *that it is possible to take the sets E_n in* (1) *of* BP *to be perfect, nowhere dense, and mutually exclusive. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, possessing the following properties:*

(A) *For every $\tau \in E$, the cluster set of $f(z)$ on t_τ is a locally connected continuum in the extended complex plane.*

(B) *For every locally connected continuum L in the extended complex plane, there exist $2^{\aleph_0}$ elements $\tau \in E$ for which the cluster set of $f(z)$ on t_τ is L.*

---

[22]) For the existence of such a set A, see, *e.g.*, HAHN, H.: *Reelle Funktionen (Punktfunktionen)*, p. 353, 40.9.2. Leipzig 1932.

[23]) *Ibid.*, p. 346.

[24]) *Ibid.*, p. 269.

[25]) *Cf.* BP, p. 187, footnote [3]) and p. 199, Remark 8.

[26]) See HAHN, H.: *loc. cit.* [22]), p. 346, p. 343, 40.2.4.

[27]) *Ibid.*, p. 266, 33.4.42.

[28]) *E.g.*, the tresses in Examples 1 to 4 on p. 187 of BP, if E there is taken to be the union of enumerably many perfect, nowhere dense, mutually exclusive sets, satisfy this condition.

Proof. We shall first prove the theorem under the assumption that $0<R<+\infty$; there is then no loss of generality in assuming that $R=1$.

According to Theorem 1 on p. 187 of BP, it is sufficient to show that there exists a finite, complex-valued, continuous function $g(z)$ in $|z|<1$, possessing the properties asserted for $f(z)$ in (A) and (B). The construction of $g(z)$ will be based on the following lemma.

Lemma 1. *There exists a complex-valued function $F(x,t)$, defined for $0\leq x\leq 1$ and $0\leq t\leq 1$, continuous in x for every t, with $\Re F(x,t)$ and $\Im F(x,t)$ lower semi-continuous in the two variables x,t and satisfying the relations $0\leq \Re F(x,t)\leq 1$ and $0\leq \Im F(x,t)\leq 1$, such that, given any continuous function $u(x)+iv(x)$, with $0<u(x)<1$ and $0<v(x)<1$, there exist $2^{\aleph_0}$ numbers t' in the interval $0\leq t\leq 1$, with the property that $F(x,t')=u(x)+iv(x)$ for $0\leq x\leq 1$.*

This lemma is a modification of a theorem due to KANTOROVITCH[29]). The only essential change in his proof that is required is the following. The set of all real polynomials in x with rational coefficients, and assuming only values in the open interval (0, 1) for all x satisfying $0\leq x\leq 1$, is enumerable, and consequently these polynomials can be numbered to form a sequence

$$Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_k(x), \ldots .$$

Now, for every ordered pair (p,q) of natural numbers p and q, let $P_n(x)=Q_p(x)+iQ_q(x)$, where $n=\frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+p$, and use the sequence $\{P_n(x)\}$ thus defined in place of KANTOROVITCH's sequence $\{P_n(x)\}$. To verify that there exist $2^{\aleph_0}$ numbers t' satisfying the conclusion of our lemma, observe that if $u(x)+iv(x)$ is a given continuous function, then there exists an infinite increasing sequence, $\{n_k\}$, of natural numbers, such that $F(x,t')=u(x)+iv(x)$ $(0\leq x\leq 1)$, where

$$t'=\frac{1}{!n_1}+\frac{1}{!n_2}+\cdots+\frac{1}{!n_k}+\cdots .$$

Such a sequence $\{n_k\}$ has $2^{\aleph_0}$ distinct proper infinite subsequences $\{n_{k_j}\}$ different from $\{n_k\}$ and all giving rise to distinct numbers

$$t''=\frac{1}{!n_{k_1}}+\frac{1}{!n_{k_2}}+\cdots+\frac{1}{!n_{k_j}}+\cdots\neq t',$$

for which $F(x,t'')=u(x)+iv(x)$ $(0\leq x\leq 1)$.

In order to define $g(z)$, we first have to construct some auxiliary functions.

Let $F(x,t)$ be as in Lemma 1. Then, because of the lower semi-continuity of $\Re F(x,t)$ and $\Im F(x,t)$, there exists[30]) a sequence of functions $H_1(x,t)$, $H_2(x,t),\ldots,H_n(x,t),\ldots$ $(0\leq x\leq 1,\ 0\leq t\leq 1)$, each of which is continuous in

[29]) KANTOROVITCH, L.: *Un exemple d'une fonction semicontinue, universelle pour les fonctions continues.* Fundamenta Mathematicae **18**, 178—181 (1932).

[30]) *Cf.* HAHN, H.: *Theorie der reellen Funktionen*, p. 162. Berlin 1921.

the two variables x, t and satisfies $0 \leqq \Re H_n(x,t) \leqq 1$, $0 \leqq \Im H_n(x,t) \leqq 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, such that

$$\lim_{n\to\infty} \Re H_n(x,t) = \Re F(x,t), \qquad \lim_{n\to\infty} \Im H_n(x,t) = \Im F(x,t), \tag{4}$$

where these limits are approached in a monotonically non-decreasing fashion for every x and t. Let $0 = \varrho_1 < \sigma_1 < \varrho_2 < \sigma_2 < \cdots < \varrho_n < \sigma_n < \cdots < 1$, and $\lim_{n\to\infty} \varrho_n = 1$. For every natural number n and every t with $0 \leqq t \leqq 1$, we define

$$h(x,t) = \begin{cases} H_n\left(\frac{2\varrho_{n+1}}{\sigma_n - \varrho_n}(x - \varrho_n), t\right), & \left(\varrho_n \leqq x \leqq \frac{\varrho_n + \sigma_n}{2}\right); \quad (5) \\ H_n\left(\frac{2\varrho_{n+1}}{\varrho_n - \sigma_n}(x - \sigma_n), t\right), & \left(\frac{\varrho_n + \sigma_n}{2} \leqq x \leqq \sigma_n\right); \\ \frac{(\varrho_{n+1} - x) H_n(0,t) + (x - \sigma_n) H_{n+1}(0,t)}{\varrho_{n+1} - \sigma_n} & (\sigma_n \leqq x \leqq \varrho_{n+1}). \quad (6) \end{cases}$$

The function $h(x,t)$ is thus defined for $0 \leqq x < 1$ and $0 \leqq t \leqq 1$, and is continuous in the two variables x, t; furthermore, we have $0 \leqq \Re h(x,t) \leqq 1$ and $0 \leqq \Im h(x,t) \leqq 1$. For these same values of x and t, define

$$h_1(x,t) = 2h(x,t) - 1, \tag{7}$$

and, for every natural number $m > 1$,

$$h_m(x,t) = m \cdot h_1(x,t). \tag{8}$$

Let $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ be those (finite) complex numbers whose real and imaginary parts are both rational, and form the functions

$$h_{m,n}(x,t) = \frac{1}{h_m(x,t)} + \zeta_n, \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots;\ 0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq t \leqq 1). \tag{9}$$

The enumerably many functions (9) together with the functions $h_m(x,t)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ can be numbered to form a sequence

$$g_2(x,t), g_3(x,t), \ldots, g_n(x,t), \ldots . \tag{10}$$

These complex-valued functions (which may assume the value ∞) are defined and continuous in the two variables x, t for $0 \leqq x < 1$ and $0 \leqq t \leqq 1$.

Take $g_1(x,0)$ to be a continuous function of x $(0 \leqq x < 1)$ mapping every interval $\varrho_n \leqq x \leqq \varrho_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ onto the extended complex plane in such a manner[31]) that $g_1(\varrho_n, 0) = g_1(\varrho_{n+1}, 0) = 0$. For every pair of numbers x, t satisfying $0 \leqq x < 1$, $0 < t \leqq 1$, set $g_1(x,t) = g_1(x,0)$. The function $g_1(x,t)$ is thus defined and continuous in the two variables x, t for $0 \leqq x < 1$ and $0 \leqq t \leqq 1$.

[31]) The existence of such a function is a simple consequence of the HAHN-MAZURKIEWICZ theorem; *cf.* HAHN, H.: *loc. cit.* [22]), p. 165, 23.5.4.

Now consider the tress $\mathcal{T}$. For every $\tau \in E$ and every r satisfying $0 < r < 1$, let $z_{\tau,r}$ be the unique point of modulus r on t_τ. Take $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < 1$ such that $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$, define $M_n = \{z_{\tau,r} : \tau \in E_n,\ r_n \leqq r < 1\}$ for every natural number n, and put $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. From our hypothesis concerning $\mathcal{T}$, and Definition 1 on p. 186 of BP, it follows that M is closed relative to $|z| < 1$, and that if $n_1 \neq n_2$, then, for every r with $\max(r_{n_1}, r_{n_2}) \leqq r < 1$, the sets[32] $D_r \cap M_{n_1}$ and $D_r \cap M_{n_2}$ are a positive distance apart.

On M we define a function $g_M^*(z)$ as follows. For every natural number n, take[33] $\xi_n(\tau)$ to be a continuous mapping of E_n onto the interval $0 \leqq t \leqq 1$. For every $z_{\tau,r} \in M$, let

$$g_M^*(z_{\tau,r}) = g_n\left(\frac{r - r_n}{1 - r_n}, \xi_n(\tau)\right), \tag{11}$$

where n is the unique natural number satisfying $\tau \in E_n$. If we bear in mind the last remark in the preceding paragraph, and Definition 2, (iii) on p. 196 of BP, we see that $g_M^*(z)$ is a continuous function on M.

The function $g_M^*(z)$, however, is not finite for every $z \in M$, and we are therefore going to truncate it by means of the function $1/(1 - |z|)$. The frontier, B, of the set S of points $z \in M$ satisfying $|g_M^*(z)| \leqq 1/(1 - |z|)$ is obviously non-empty and closed relative to M. As is seen from the definition of dimension[34], every T_n in Definition 1, (ii) on p. 187 of BP is of dimension 1, and hence[35] $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ is of dimension 1, so that its subset B is of dimension $\leqq 1$. The function $e^{i \arg g_M^*(z)}$ is well-defined, single-valued, continuous, and of modulus 1 on B, and consequently[36] can be extended to a function $\gamma(z)$ possessing the same properties on M. For every $z \in M$, set

$$g_M(z) = \begin{cases} g_M^*(z) & \text{if} \quad z \in S, \\ \dfrac{1}{1 - |z|}\gamma(z) & \text{if} \quad z \in M - S. \end{cases} \tag{12}$$

It is clear that $g_M(z)$ is finite and continuous on M, so that, according to Tietze's theorem[37], it can be extended to a finite continuous function $g(z)$ in $|z| < 1$.

For every $\tau \in E$, it is evident that the cluster set of $g(z)$ on t_τ is the same as that of $g_M(z)$, and it follows from (12) that the cluster set of $g_M(z)$ on t_τ is the same as that of $g_M^*(z)$. To complete the proof of the theorem, it therefore suffices to show that assertions (A) and (B) hold when we replace $f(z)$ in them by $g_M^*(z)$.

---

[32]) We recall from BP that D_r is the disk $|z| \leqq r$.

[33]) *Cf.* Hahn, H.: *ibid.*, p. 161.

[34]) See, *e.g.*, Kuratowski, C.: *loc. cit.* [14]), p. 162.

[35]) *Ibid.*, p. 177, Corollary 1.

[36]) *Cf.* Kuratowski, C.: *loc. cit.* [5]), p. 271, VI, 2.

[37]) *Cf.* Hahn, H.: *loc. cit.* [22]), p. 255, 32.4.131.

Let $\tau \in E$. Then there is a unique natural number n satisfying $\tau \in E_n$. If we set $t' = \xi_n(\tau)$, then it is obvious from (11) that the cluster set of $g_M^*(z)$ on t_τ is identical with the cluster set of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$. Conversely, given a natural number n, and a number t' satisfying $0 \leqq t' \leqq 1$, there is at least one $\tau \in E_n$ such that $\xi_n(\tau) = t'$, and the cluster sets of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$, and $g_M^*(z)$ on t_τ, again coincide. Our problem is thus reduced to showing two things: 1) Given an arbitrary locally connected continuum L in the extended complex plane, there exists a natural number n and $2^{\aleph_0}$ numbers t' satisfying $0 \leqq t' \leqq 1$, such that the cluster set of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$ is L. 2) For every natural number n and every t' satisfying $0 \leqq t' \leqq 1$, the cluster set of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$ is a locally connected continuum in the extended complex plane.

Let us first prove 1). In case L is the extended complex plane, it is obvious from the definition of $g_1(x, t)$, that, for every t' satisfying $0 \leqq t' \leqq 1$, the cluster set of $g_1(x, t')$ as $x \to 1$ is L. Suppose, however, that L is not the extended complex plane. If L does not contain the point ∞, then there exists a natural number m such that L lies inside the square

$$-m < \Re w < +m, \qquad -m < \Im w < +m. \tag{13}$$

Let $\Lambda(x)$ be a continuous function defined for $0 \leqq x \leqq 1$ and mapping[31]) this interval onto L in such a manner that $\Lambda(0) = \Lambda(1)$. Then

$$u(x) + i\,v(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda(x)}{m} + 1\right) \tag{14}$$

is a continuous function satisfying $0 < u(x) < 1$, $0 < v(x) < 1$, $(0 \leqq x \leqq 1)$. Let t' be any one of the $2^{\aleph_0}$ numbers in the interval $0 \leqq t \leqq 1$, for which

$$F(x, t') = u(x) + i\,v(x), \qquad (0 \leqq x \leqq 1). \tag{15}$$

We shall show that L is the cluster set of $h_m(x, t')$ as $x \to 1$.

To this end, suppose, first, that $w_0 \in L$. Then there exists an x' such that

$$\Lambda(x') = w_0, \tag{16}$$

and, since $\Lambda(1) = \Lambda(0)$, we may assume that $0 \leqq x' < 1$. Let n' be the smallest natural number such that $x' < \varrho_{n'+1}$, and, for every natural number $n \geqq n'$, set $x_n = \dfrac{\sigma_n - \varrho_n}{2\varrho_{n+1}}\, x' + \varrho_n$. Then, for every $n \geqq n'$, we have $\varrho_n \leqq x_n < \frac{1}{2}(\varrho_n + \sigma_n)$, so that, according to (8), (7), and (5),

$$h_m(x_n, t') = m \cdot [2h(x_n, t') - 1] = m \cdot [2H_n(x', t') - 1]. \tag{17}$$

It follows from (17), (4), (15), (14), and (16), that

$$\lim_{n \to \infty} h_m(x_n, t') = w_0, \tag{18}$$

which means that w_0 belongs to the cluster set of $h_m(x, t')$ as $x \to 1$.

Now suppose, conversely, that w_0 belongs to the cluster set of $h_m(x, t')$ as $x \to 1$. Then there exists an increasing sequence $\{x_n\}$, with $0 < x_n < 1$ and $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, for which (18) holds. We consider three cases in order to show that $w_0 \in L$. If, for infinitely many n, there is a j_n such that $\sigma_{j_n} \leqq x_n \leqq \varrho_{j_n+1}$, then it follows from (18), (8), (7), (6), (4), (15), and (14), that $w_0 = \Lambda(0) \in L$. If there is an infinite subsequence, $\{n_k\}$, of $\{n\}$ such that, for every k, there is a j_k satisfying

$$\varrho_{j_k} < x_{n_k} \leqq \tfrac{1}{2}(\varrho_{j_k} + \sigma_{j_k}), \tag{19}$$

let us set

$$x'_k = \frac{2\varrho_{j_k+1}}{\sigma_{j_k} - \varrho_{j_k}} (x_{n_k} - \varrho_{j_k}), \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{20}$$

According to (19) and (20), we have $0 < x'_k < 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. The sequence $\{x'_k\}$ has at least one limit point, say x', in the interval $0 \leqq x \leqq 1$, and we may assume, without loss of generality, that

$$\lim_{k\to\infty} x'_k = x'. \tag{21}$$

If we observe that the sequences $\{\Re H_n(x, t')\}$ and $\{\Im H_n(x, t')\}$ are continuously convergent[38]) at $x = x'$, then it follows from (18), (8), (7), (20), (5), (21), (4), (15), and (14), that

$$\begin{aligned} w_0 = \lim_{k\to\infty} h_m(x_{n_k}, t') &= \lim_{k\to\infty} m \cdot [2H_{j_k}(x'_k, t') - 1] \\ &= m \cdot [2F(x', t') - 1] = \Lambda(x') \in L. \end{aligned}$$

Finally, the case in which there is an infinite subsequence, $\{n_k\}$, of $\{n\}$ such that, for every k, there is a j_k satisfying $\frac{1}{2}(\varrho_{j_k} + \sigma_{j_k}) \leqq x_{n_k} < \sigma_{j_k}$, is handled like the preceding case, and the three cases considered exhaust all possibilities. Hence, $w_0 \in L$.

This completes the proof of 1) in case L either is the extended complex plane or does not contain the point ∞, if we recall the definition of the sequence (10).

Suppose, however, that L is not the extended complex plane but does contain the point ∞. Then there exists a point ζ_n (*cf.* (9)) and a natural number m such that L lies in the exterior of the circle $|w - \zeta_n| = 1/m$. Hence, the set

$$L^* = \left\{ \frac{1}{w - \zeta_n} : w \in L \right\} \tag{22}$$

is a locally connected continuum lying inside the square (13). We have already shown that there exist $2^{\aleph_0}$ numbers t' in the interval $0 \leqq t \leqq 1$ such that the cluster set of $h_m(x, t')$ as $x \to 1$ is L^*; hence, according to (22) and (9), the cluster set of $h_{m,n}(x, t')$ as $x \to 1$ is L. In view of the definition of (10), the proof of 1) is now complete.

[38]) *Cf.* Hahn, H.: *loc. cit.* [30]), p. 244, Theorem XI.

It is evident from the proof of 1), that for every natural number n and every t' satisfying $0 \leqq t' \leqq 1$, the cluster set of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$ is the set of values in the extended complex plane, of some continuous function defined for $0 \leqq x \leqq 1$, and thus the truth of 2) follows from the Hahn-Mazurkiewicz theorem[31]).

This completes the proof of Theorem 4 in case R is finite. If $R = +\infty$, the only essential modification of the proof that is required is a replacement of the $\frac{1}{1-|z|}$-truncation (12) by a corresponding $|z|$-truncation.

§ 5. The next theorem shows that, although E in Theorem 4 is an F_σ, for certain kinds of tresses[39]), *e.g.*, those composed of radii, E may be taken to be an arbitrary perfect, nowhere dense set.

Theorem 5. *Let E^* be a perfect, nowhere dense subset of the interval $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, and possessing the following properties:*

(a) *For every $\vartheta \in E^*$, the cluster set of $f(r e^{i\vartheta})$ as $r \to R$ is a locally connected continuum in the extended complex plane.*

(b) *For every locally connected continuum L in the extended complex plane, there exist $2^{\aleph_0}$ elements $\vartheta \in E^*$ for which the cluster set of $f(r e^{i\vartheta})$ as $r \to R$ is L.*

Proof. Let ϑ_0 be the smallest number belonging to E^*, and let $2\pi = \vartheta_1 > \vartheta_2 > \cdots > \vartheta_k > \cdots > \vartheta_0$, where $\lim_{k\to\infty} \vartheta_k = \vartheta_0$, for every natural number $k > 1$, $\vartheta_k \notin E^*$, and, for every natural number k, $E^* \cap I_k \neq 0$, I_k being the interval $\vartheta_k \geqq \vartheta \geqq \vartheta_{k+1}$. If we take

$$E_1^* = \{\vartheta_0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E^* \cap I_{2k-1}) \quad \text{and} \quad E_{n+1}^* = E^* \cap I_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

then $E_1^*, E_2^*, E_3^*, \ldots$ are mutually exclusive, perfect, nowhere dense sets whose union is E^*. Let $E = \{e^{i\vartheta} : \vartheta \in E^*\}$. For every number $\tau \in E$, put $t_\tau = \{r\tau : 0 \leqq r < R\}$. An application of Theorem 4 to the tress $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ now completes the proof of Theorem 5.

By employing a device used in the proof of Theorem 3 on p. 193 of BP, one readily obtains an $f(z)$ possessing the additional property that, for every ϑ in the interval $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ and satisfying the condition $\vartheta \notin E^*$, the cluster set of $f(r e^{i\vartheta})$ as $r \to R$ is the extended complex plane. Thus we have

Corollary 1. *Theorem 5 remains valid if E^* is replaced in property* (a) *by the interval $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$.*

§ 6. The phenomenon described in Theorem 5 can be made to occur in every sector of $|z| < R$ with vertex at the origin, as is seen from

Theorem 6[39]). *Suppose that $0 \leqq \mu \leqq 2\pi$. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, and a subset E [independent of $f(z)$] of the unit circle $|\tau| = 1$,*

[39]) Remark 8 on p. 199 of BP obviously applies to Theorems 5 and 6 of the present paper.

where E is an F_σ of first category and measure μ, possessing the following properties:

(α) For every $\tau \in E$, the cluster set of $f(r\tau)$ as $r \to R$ is a locally connected continuum in the extended complex plane.

(β) For every locally connected continuum L in the extended complex plane, there exist $2^{\aleph_0}$ elements $\tau \in E$ on every subarc of $|\tau| = 1$, such that the cluster set of $f(r\tau)$ as $r \to R$ is L.

Proof. As will be seen from the proof, there is no loss of generality in assuming that $R = 1$. We shall first construct a subset E of $|\tau| = 1$ such that E has measure μ and is the union of mutually exclusive, perfect, nowhere dense sets $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ with the property that every subarc of $|\tau| = 1$ contains at least one of these sets. If $\mu > 0$, let $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots < \mu$ and $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \mu$; if $\mu = 0$, let $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Take a perfect, nowhere dense subset, P_1, of $|\tau| = 1$, with meas $P_1 = \lambda_1$. On each of the complementary open arcs of $|\tau| = 1$ determined by P_1, take a perfect, nowhere dense set containing the midpoint of this arc, such that the sum of the measures of these sets, call them $P_1^2, P_2^2, \ldots, P_j^2, \ldots$, is $\lambda_2 - \lambda_1$. Now the set $P_2 = P_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^2\right)$ is evidently perfect and nowhere dense; again, on each of the complementary open arcs determined by it, take a perfect, nowhere dense set containing the midpoint of this arc, such that the sum of the measures of these sets, call them $P_1^3, P_2^3, \ldots, P_j^3, \ldots$, is $\lambda_3 - \lambda_2$. Repeat the argument with the perfect, nowhere dense set $P_3 = P_2 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^3\right)$. Continuing in this manner indefinitely, we obtain, in addition to the original set P_1, an infinite double sequence of perfect, nowhere dense sets $\{P_j^k\}$; all these sets are mutually exclusive, and may be arranged in a simple infinite sequence, say $E_1 (= P_1), E_2, \ldots, E_m, \ldots$. Let $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Then meas $E = \lambda_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \mu$. Since, for every $k > 1$, the length of every one of the complementary open arcs determined by P_k is at most one half the greatest of the lengths of the complementary open arcs determined by P_{k-1}, the set E is everywhere dense on $|\tau| = 1$, and consequently every subarc of $|\tau| = 1$ contains at least one of the sets E_m[40]).

According to the proof of Theorem 5, for every natural number m, there exist mutually exclusive, perfect, nowhere dense sets $E_1^m, E_2^m, \ldots, E_n^m, \ldots$ such that $E_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$. Take $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m < \cdots < 1$ such that $\lim_{m\to\infty} s_m = 1$. For every pair of natural numbers m, n, define $M_n^m = \{r\tau : s_{m+n} \leq r < 1, \tau \in E_n^m\}$, $M_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^m$, and $M^* = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$. For every natural number m, identify the

[40]) The foregoing construction shows that the set M in Theorem 11 on p. 198 of BP can be taken so as to have any prescribed measure μ with $0 \leq \mu \leq 2\pi$.

sets M_m, M_n^m, and the numbers $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_{m+n}, \ldots$ with the sets M, M_n, and the numbers $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, respectively, in the proof of Theorem 4, to obtain a continuous function $g_{M_m}(z)$ on M_m possessing the properties of the function $g_M(z)$ in the proof of Theorem 4. Since, for every m, the set M_m has no points in the circle $|z| < s_{m+1}$, the function $g_{M^*}(z)$ defined on M^* so as to coincide with $g_{M_m}(z)$ on M_m for every m, is evidently continuous on the set M^*, which is closed relative to $|z| < 1$, and so, by TIETZE's theorem, $g_{M^*}(z)$ can be extended to a continuous function $g(z)$ in $|z| < 1$. The proof of Theorem 6 can now be completed after the manner of the proof of Theorem 4.

The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (U.S.A.).

Dept. of Math., University of Notre Dame, Notre Dame, Ind. (U.S.A.).

(Eingegangen am 14. Dezember 1954.)

Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen

Von Dr. **Friedrich Lösch**, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. VIII, 335 Seiten 4°. 1954. Ganzleinen DM 49.80

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — Tafel I. Neunstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für $x = 0\,(0{,}0001)\,0{,}1$. — Tafel II. Siebenstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für $x = 0{,}1\,(0{,}0005)\,3{,}15$; $x = 3\,(0{,}01)\,10$; $x = 10\,(0{,}1)\,20$; Werte von $\operatorname{tg} x$ für $x \quad \frac{\pi}{2}$; Werte von $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x$ für $x \quad 1$. — Tafel III. Siebenstellige Werte elementarer Funktionen für $x = 0\,(1)\,100$. — Tafel IV. Zwölfstellige Werte von $\frac{\pi}{2} n$ für $n = 0\,(1)\,100$. — Tafel V. Siebenstellige Werte der Funktionen $\sin \frac{\pi}{2} x$, $\cos \frac{\pi}{2} x$ für $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}5$. — Tafel VI. Siebenstellige Werte der Funktionen $e^{\frac{\pi}{2} x}$, $e^{-\frac{\pi}{2} x}$, $\mathfrak{Sin} \frac{\pi}{2} x$, $\mathfrak{Cof} \frac{\pi}{2} x$ für $x = 0\,(0{,}01)\,2$. — Tafel VII. Siebenstellige Werte der Funktionen $e^{\frac{\pi x}{180}}$, $e^{-\frac{\pi x}{180}}$, $\mathfrak{Sin} \frac{\pi x}{180}$, $\mathfrak{Cof} \frac{\pi x}{180}$ für $x = 0\,(1)\,180$. — Tafel VIII. Umwandlung von Bogenmaß (x) in Gradmaß (φ). — Tafel IX. Umwandlung von Gradmaß (φ) in Bogenmaß (x). — Tafel X. Einige oft gebrauchte Zahlenwerte.

Aus dem Vorwort: In den letzten zwei Jahrzehnten sind, vor allem im Rahmen des "Applied Mathematics Program of the National Bureau of Standards", ausführliche Tafeln für fast alle elementaren transzendenten Funktionen erschienen. Es fehlt jedoch, seit die von K. Hayashi im Jahre 1926 herausgegebenen Tafeln vergriffen sind, ein zusammenfassendes mehrstelliges Werk über diese Funktionen. Die vorliegenden Tafeln sollen zur Ausfüllung dieser Lücke beitragen. — Entsprechend der Zielsetzung schließen sie sich in ihrer Grundanlage notwendig an die genannten Hayashischen Tafeln an. Das Bestreben, ein für viele Rechnungen ausreichendes, nicht zu umfangreiches und dabei bequem benutzbares Tafelwerk zu geben, führte jedoch im einzelnen zu wesentlichen Abweichungen. Einerseits wurde die Stellenzahl der Tafelwerte fast durchweg auf 7 Dezimalen beschränkt. Andererseits wurde der Tafelschritt so weit verkleinert, daß bei einem zulässigen Fehler von 1 bis 2 Einheiten der letzten Stelle im Hauptintervall fast durchweg lineare Interpolation möglich ist. Zur Erleichterung der Interpolation wurden die ersten Differenzen beigegeben. — Ein großer Teil der Tafeln ist vollständig neu berechnet worden. Bei dem restlichen Teil wurde von den vorhandenen Quellen ausgegangen und so weit nötig eine Ergänzung der damit gegebenen Werte durch Interpolation vorgenommen. In jedem Falle wurden die auf 9 bis 10 Dezimalen ermittelten Funktionswerte durch Differenzenbildung kontrolliert. Die Abrundung auf 7 bzw. 9 Dezimalen wurde in der üblichen Weise vorgenommen. In Zweifelsfällen wurde die letzte Dezimale durch direkte Berechnung des betreffenden Wertes auf die erforderliche Stellenzahl ermittelt. Auf die Abfassung des Manuskripts und die Durchführung der Korrekturen ist die größte Sorgfalt verwendet worden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Landolt-Börnstein

Zahlenwerte und Funktionen

aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik

Sechste Auflage. In Gemeinschaft mit **J. Bartels, P. ten Bruggencate, K. H. Hellwege, Kl. Schäfer, E. Schmidt** und unter vorbereitender Mitwirkung von **J. D'Ans, G. Joos, W. A. Roth†** herausgegeben von **Arnold Eucken†**. In vier Bänden.

Soeben erschienen:

I. Band:

Atom- und Molekularphysik

In 5 Teilen:

4. Teil: **Kristalle.** Bearbeitet von **W. Biltz†, W. Döring, Th. Ernst, A. Faessler, W. Fischer, A. M. Hellwege, E. Hertel, S. Koritnig, H. Krüger, G. Leibfried, U. Meyer-Berkhout, K. Molière, H. Pick, W. Schröck-Vietor, H. Seidel, F. Stöckmann, R. Suhrmann.** Vorbereitet von **Georg Joos.** Weitergeführt von **A. Eucken†.** Herausgegeben von **K. H. Hellwege.** Mit 930 Abbildungen. XI, 1007 Seiten 4°. 1955.
In Moleskin gebunden DM 318.—

Mit diesem 4. Teil liegt der erste Band abgeschlosssen vor.

IV. Band:

Technik

In 4 Teilen:

1. Teil: **Stoffwerte und mechanisches Verhalten von Nichtmetallen.** Bearbeitet von **R. Bierl, B. Boonstra, E. vom Ende, J. Endell, W. Fritz, R. Houwink, H. R. Jacobi, P.-A. Koch, F. Kollmann, Th. Kristen, C. Kux, P. Lagally, E. Lax, S. Peter, L. Schiller, G. Schinke, H. Schönborn, G. V. Schulz, K. Schuster, C. Schusterius, Ph. Siedler, G. Vogelpohl.** Herausgegeben von **Ernst Schmidt,** München. Mit 1104 Abbildungen. XVI, 881 Seiten 4°. 1955. In Moleskin gebunden DM 288.—

Bisher erschien:

I. Band: **Atom- und Molekularphysik**
- 1. Teil: **Atome und Ionen,** am 3. 7. 1950.
- 2. Teil: **Molekeln I** (Kerngerüst), am 24. 3. 1951.
- 3. Teil: **Molekeln II** (Elektronenhülle), am 25. 10. 1951.
- 5. Teil: **Atomkerne und Elementarteilchen,** am 21. 12. 1951.

III. Band: **Astronomie und Geophysik,** erschien am 21. 12. 1951.

Die weiteren Bände werden folgende Gebiete behandeln:

II. Band: **Makrophysik und Chemie.** In 6 Teilen. In Vorbereitung.

IV. Band: **Technik.** Die weiteren 3 Teile in Vorbereitung.

Jeder Band und Bandteil ist einzeln käuflich.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.